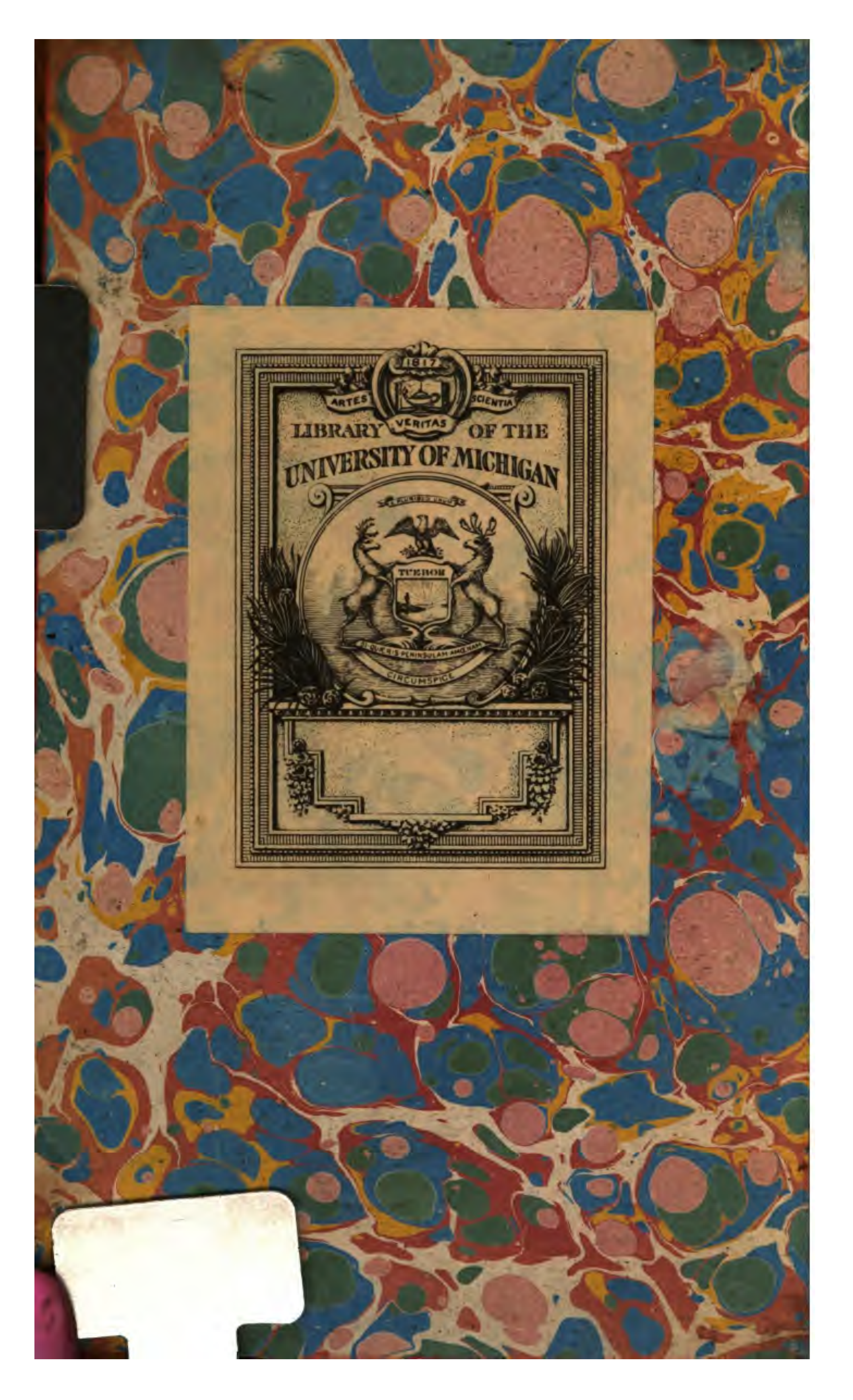

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE





Combinatorische Analytik

und

Theorie der Dimensionszeichen

in Parallele gestellt

von

Heinrich August Töpfer.

Leipzig, 1793.
bey Siegfried Lebrecht Crusius.

Leibnit. Opp. T. III. p. 34, 54, 367.

Ego vero agnosco, quicquid in genere probat Analysis, non nisi superioris scientiae *beneficium esse, quam nunc* COMBINATORIAM CHARACTERISTICAM *appellare soleo: longe diuersam ab illa, quae auditis his vocabulis, statim alicui in mentem venire posset, quamque ex ea, quam anno* 1666 *edidi, nolim aestimari.* Ars Combinatoria generalis ac vera *hoc praestat, errare ne possimus quidem, si velimus, et, vt veritas quasi picta, velut Machinae ope in charta expressa, deprehendatur. — Quantae vtilitatis sit, ad* Canones nouos, vtiles et late fusos eruendos, Canonumque analyticorum Tabulas condendas, PROGRESSV TEMPORIS *magis apparebit. — Nihil est, quod norim in tota Analysi momenti maioris. — Atque ita demum,* per Characteristicam ex Combinatoria Arte, *Algebra siue Analysis ei subordinata*, perficietur.

Dem

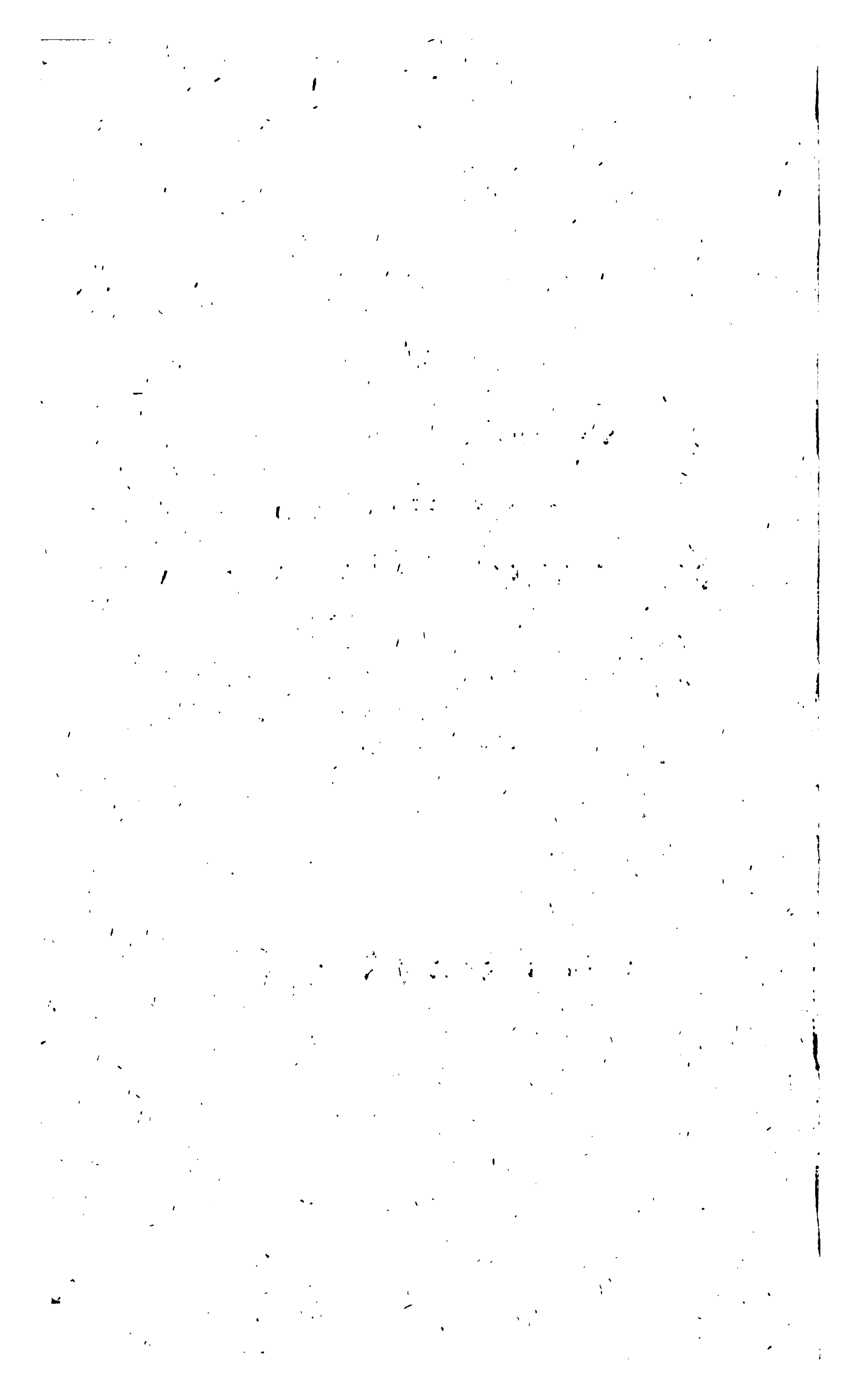
Hochwohlgebornen Herrn

Herrn

Adam Friedrich August von Watzdorf

Sr. Churfürstl. Durchl. zu Sachsen bey Dero Hofgerichte zu Wittenberg hochbestallten Hofrichter und Ober-Creys-Steuereinnehmer, Erbherrn auf Wiesenburg, Jeßnitz, Röttis und Letza

meinem gnädigen Herrn.



Hochwohlgeborner Herr,

Gnädiger Herr,

Die Mathematik, welche Ew. Hochwohlgeb. als Kenner darum vorzüglich achten, weil sie in dem menschlichen Verstande die Grundfeste des Denkens legt; die Wißbegierde eines unsterblichen Geistes mit dauernden und unschätzbaren Kenntnissen bereichert; ihn tiefer in das Gebiete der Natur einführt, und an die erhabensten Resultate, welche eine nähere Betrachtung der überirdischen sichtbaren Schöpfung, nur allein durch ihre Vermittelung, gewährt, mit mächtiger Ueberzeugung das lezte und allbelohnende einer Gottheit knüpft: diese selbstständige, vollkommene, unwandelbare Wissen-

schaft

schaft kennen zu lernen und zu studiren, verdanke ich dem Glücke, das ich durch Dero gnädige und unterstützende Aufmunterung genoß. Ew. Hochwohlgeb. erlauben meinem Dankgefühle dieses Opfer: gegenwärtige Schrift Denenselben überreichen zu dürfen. Der Gegenstand, den sie behandelt, ist von solcher Erheblichkeit, daß er die Aufmerksamkeit der Kenner nothwendig interessiren muß. Dieses Bewußtseyn versichert mir Ew. Hochwohlgeb. gütige Aufnahme.

Ich verharre mit der ehrfurchtvollsten Hochachtung

Ew. Hochwohlgebornen

Leipzig
den 18ten May
1793.

unterthänigster,
Heinrich August Töpfer.

Vorrede.

Unter den merkwürdigen Erfindungen unseres Zeitalters verdient die Theorie der combinatorischen Analytik eine der ersten Stellen. Durch sie wurde das Grundgebiete der Analysis beträchtlich erweitert, die Priorität derselben höher gestellt, die Allgemeinheit der Aufgaben, selbst in den verwickeltsten Fällen, aufs höchste getrieben, und die Formeln für ihre auch noch so sehr zusammengesetzten Resultate, mit der möglichsten Simplicität, in Absicht auf Ausdruck und Anordnung, Darstellung und Entwickelung, vereinbart — eine Theorie, welche in der Folge nicht weniger interessante und weiteraussehende Stoffe ihrer Art zum Nachdenken in Umlauf bringen wird, als das Kantische Meisterwerk des Tiefsinns.

Die Ehre dieser wichtigen Erfindung, die eine gereifte Einsicht in die Organisation der gesamten Analysis und eine neue Schöpfung der Combinationslehre voraussetzte, war dem Herrn Professor Hindenburg vorbehalten. Die von ihm aufgestellte, auf sein combinatorisches System gegründete, Zeichensprache ist das wahre Organ, durch welches diese ganz simple und primitive Wissenschaft ihre allgewaltigen Wirkungen in die Analysis verbreitet. Ihr Erfinder hat jene combinatorischen Elemente gleichsam zu einer Optik und Mechanik für die Analysis ausgebildet: zu einer Optik, die in den tiefsten Gründen der Wissenschaft verborgenen Gesetze auszuspähen; zu einer Mechanik, ihre unbeweglichsten Probleme zu bewältigen — und es ist nicht zu zweifeln, daß die von Leibnitzen *) schon beabsichtigte und von Herrn Hindenburg zu

*) Ausser der auf der Rückseite des Titelblattes schon bemerkten Leibnitzischen Stelle, will ich hier nur noch fol-

zu Stande gebrachte so enge und innige Vereinigung der Combinationslehre mit der Analysis, ihren wohlthätigen Einfluß, durch ein erweitertes Studium, auch über mehrere Theile der Gelehrsamkeit künftig verbreiten werde.

Mitten unter solchen Aussichten, die Herr Professor Hindenburg den Lesern seiner combinatorisch-analytischen Schriften vorlängst eröffnet, und den Zuhörern seiner akademischen Vorlesungen von Zeit zu Zeit durch neuere sehr wichtige Aufschlüsse und Resultate bestätiget hatte, erschien auf einmal im vorigen Jahre ein Werk, das dieselbe, nur aber sehr beschränkte, Theorie, unter einem fremden Namen und einem nur wenig abgeänderten Gewande vorträgt; eine Theorie, welche ihr Verfasser für sein Eigenthum ausgiebt, obschon das Hauptwerk bey ihr, die ganze Grundlage an Zeichen und Sätzen, auf denen alles beruht, von Herrn Hindenburg entlehnt.

folgendes anführen: *Algebra*, quam tanti facimus merito, *generalis alius artificii* non nisi *pars* est. Combinatoriae characteristicae *mirabilem vim ac potestatem*, praeceptis *aliquando* et speciminibus me explicaturum *spero*, si *sanitas* atque *otium* fuerit.

Consilium etiam habeo TABULARUM ANALYTICARUM, quae non minoris futurae essent usus in Analysi quam Tabulae Sinuum in Geometria — Prodeunt semper Canones quam maxime regulares, et harmoniam quam continent prodentes — Nihil est, quod norim in tota Analysi momenti maioris. Nam in his Tabulis pleraque problemata statim soluta haberentur, aut leui opera possent inde deduci. Leibn. Opp. T. III p. 34 et 54. Von dergleichen combinatorisch-analytischen Tafeln hat Herr Professor Hindenburg (Nov. Syst. Comb. p. XXVII — XXXI) einen umständlichen, bey der Ausführung noch zu erweiternden, Entwurf, auch einige Beispiele (das. p. LXIX — LXXXIII; und in der Vorrede zu Rüdig. Spec. de lin. curu p. XXXVI seq.) mitgetheilt. Man sehe hier die Note y. S. 39. 40. Mehrere combinatorische und andere Hülfstafeln stehen am Ende von Inf. Dign. 157 — 180.

lehnt ist. Diese so dreiste, und, ich mögte wohl sagen, gewaltsame Anmaassung machte eine Parallele der Hindenburgischen combinatorischen Analytik mit der Fischerischen Theorie der Dimensionszeichen nothwendig; und so zog die Dankbarkeit gegen meinen grossen Lehrer, und die Achtung gegen das gelehrte Publikum mich zu dieser Pflicht: erstern die Gerechtigkeit, die seinen allgemein anerkannten Verdiensten gebühret, wiederfahren zu lassen; letzteres für einen möglichen Irthum zu verwahren.

Wie nothwendig diese Verwahrung sey, dafür kann ich hier einen einleuchtenden, zur Sache selbst gehörigen, Beweis vorlegen, der mir eben in die Hände fiel, als ich im Begriffe war diese Vorrede abzufassen.

Der Recensent der Fischerischen Theorie der Dimensionszeichen in der allgemeinen Litteratur-Zeitung von diesem Jahre (No. 102. S. 76 — 80), ein Mann, wie ihn die Recension zeigt, von gründlichen Kenntnissen und Einsichten, erinnert am Ende derselben: Coefficienten einer Reihe auf eine schickliche Art zu bezeichnen, und dadurch die Combinationen und Permutationen derselben bei Potenziirungen, Multiplicationen, Divisionen und andern Operationen, welche mit den Reihen vorzunehmen sind, zu erleichtern und besser zu übersehen, habe vor dem Verfasser der Theorie der Dimensionszeichen schon Herr Professor Hindenburg in mehrern Schriften gewiesen; und schließt diese Nachweisung mit folgenden Worten: „Herr Fischer geht in manchen Bezeichnun„gen von Herrn Hindenburg ab, worinn nun freilich ein „jeder seinen eigenen Willen hat. Aber eine übereinstim„mende Sprache wäre doch in der Analysis vortheilhaft.“ Dieser Zusatz veranlaßt folgende zwei Bemerkungen, die sich gleichsam von selbst ergeben. Erstens, kann der Leser dadurch sehr leicht, und muß fast, auf die Vermuthung kommen, Herr Fischer habe eine wohlüberdachte Auswahl unter den Hindenburgischen Zeichen getroffen, da er doch

alles für sein Eigenthum ausgiebt: er habe vielleicht, statt der liegen gelassenen Hindenburgischen Zeichen, ausdruckvollere und wirksamere gewählt; wie denn Herr Fischer ausdrücklich behauptet (Vorrede S. V), die Bezeichnungsart, deren er sich in seinem Werke bedient habe, sey die einzige einfache und leichte, die zur Auflösung aller der Probleme leiten könne, die in dem Hindenburgischen Entwurfe (Nov. Syst. Comb. p. XXVII — XXXI.) wirklich auflösbar seyn möchten; und so würde denn die angebliche grössere Wirksamkeit nicht auf die beibehaltenen, sondern auf die veränderten Zeichen nothwendig fallen müssen, wodurch aber, wider des Recensenten Meinung und Absicht, die beschränkte weitschweifige Theorie der Dimensionszeichen zum Nachtheile der allgemeinern und simplern combinatorischen Analytik offenbar begünstiget werden würde. Zweitens, zeigt Recensent durch diesen Zusatz deutlich, daß ihm nicht bekannt gewesen sey, was sich auch gar nicht vermuthen ließ, und nur die unmittelbare Vergleichung der Schriften beider Verfasser lehren konnte, (welche anzustellen Recensent keinen nothwendigen Beruf hatte) daß er nehmlich nicht wahrgenommen hat, was gegenwärtige Schrift unwidersprechlich darthut, auch aus der Vergleichung der in den Tafeln am Ende neben einander gesetzten Hindenburgischen und Fischerischen Ausdrücke und Formeln sogleich erhellt: daß die Fischerischen Dimensionszeichen keine andern als Hindenburgische, nur absichtlich verstellte, Combinationszeichen sind; wobei denn die, an sich ganz billige und gerechte Aeusserung, daß Jeder bey der Wahl von Zeichen seinen eigenen Willen habe, von selbst wegfällt.

Wenn übrigens der einsichtsvolle Recensent erinnert, daß manche Verfahrungsarten in der Fischerischen Schrift nicht immer auf dem kürzesten Wege zum Resultate führen, so wird er finden, daß diese Klage auch in die-

dieser Schrift häufig geführt worden ist, und wird die hier und da nachgewiesenen oder beigebrachten kürzern Verfahren und Aufschlüsse (wie auch im letzten Falle sehr eminente Beispiele davon vorkommen) gewiß mit Vergnügen bemerken.

Die Erinnerung betreffend, daß man überhaupt nicht für Auflösungen in der größten Allgemeinheit seyn könne, wenn sie auf Formeln führen, in denen man sich bei der Anwendung auf einzelne Fälle durch ein Heer von Substitutionen durcharbeiten muß: so muß man dabei genau das denken, was Recensent, wie sich aus dem Zusammenhange deutlich ergiebt, gedacht hat — wenn nehmlich diese Substitutionen entweder an sich schwierig sind, oder wohl noch obendrein, wie in der gewöhnlichen Analysis, bei sehr allgemein ausgedrückten datis, häufig der Fall ist, auf verdrüßliche oder doch weitschweifige Reductionen führen. Denn sonst könnte man diese Aeusserung gegen die combinatorische Analytik misbrauchen, und einen ihrer wesentlichen Vorzüge, nach welchem sie aus denen auf die allgemeinste Art gezeichneten Annahmen und Voraussetzungen, die Resultate aus ihnen in eben so allgemein ausgedruckten, nach Beschaffenheit der Umstände ziemlich zusammengesetzten, Formeln nachweißt, unerkannt übersehen, weil hier die speciellern Fälle aus dem allgemeinen, vermittelst einer ganz leichten Interpretation, ohne alle, durch den speciellen Fall etwa blos veranlaßte, Reduction sich ergeben. Dieser Vortheil erstreckt sich so weit, daß man sogar durch diese Allgemeinheit noch Erleichterung für die Resultate der speciellen Fälle gewinnt; daher auch Herr Professor Hindenburg in seinem Novo systemate Combinationum statt der speciellern Reihen, in seinen dort behandelten Aufgaben, durchgängig die am allgemeinsten ausgedruckte $az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} +$ rc. zum Grunde legt, um mehrere Reductionen, die ihm bey Voraussetzung der einfachern Reihe $az^1 + bz^2 + cz^3 +$ rc. für gewisse specielle Anwen-

wendungen, in seinem ersten Werke Infinitinomii Dignitates (p. 94 — 98, p. 118, 119. p. 138 — 142) vorgefallen waren, zu vermeiden. Herr Hindenburg hat auf diesen Vorzug der allgemein ausgedrückten Reihen ausdrücklich (Nov. Syst. Comb. p. LXII besonders aber p. LXIII, 2.) aufmerksam gemacht, und Herr Fischer hat späterhin diesen Vortheil auch erkannt (§. 93. S. 67) und durch sein ganzes Werk benutzt.

Ein sehr einleuchtendes Beispiel zur Erläuterung giebt die Umkehrung der Reihen, nach den verschiedenen Formeln, die man nun dafür hat. Sucht man aus $y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$ wo die Exponenten ganz einfach sind, den Werth von x nach de Moivre (hier S. 128. 129), so ist schon dafür die Arbeit höchst beschwerlich, wird aber für x^t aus $y^\rho = ax^\mu + bx^{\mu+\delta} +$ ꝛc. wo die Exponenten jede Zahl bedeuten können, unerträglich, und die Schwierigkeiten vermehren sich noch, wenn man die Methode in der größten Allgemeinheit, um die besondern Fälle daraus herzuleiten, auf die Doppelreihe anwendet (Kästn. An. endl. Größen §. 692. 693). Wenn also Hausen (El. Ar. et Geom. p. 181) bey Rechtfertigung der Ausdrückungen trigonometrischer Functionen durch Kreisbogen und umgekehrt, sich bey einigen dieser Aufgaben auf die Umkehrungsmethode beruft: so erinnert Herr Hofrath Kästner, dieser grosse und vortrefliche Analyst, dagegen (An. des Unendl. §. 285. 305) die Umkehrung (nach Moivre) sey wegen der Weitläuftigkeiten, zu denen sie führe, nicht anzurathen, und zieht ihr den Gebrauch der höhern Differenzialen zu der Absicht mit Recht vor. Nach der Eschenbachischen combinatorisch-analytischen Umkehrungsformel hingegen (hier Tafel VIII, A) noch mehr aber, nach der Hindenburgischen Reduction der Coefficienten dieser Formel auf Coefficienten des allgemeinen Potenzentheorems, (hier S. 172) verschwinden alle diese Schwierigkeiten auf einmal. Man hat nun eine directe ganz leichte Methode, die Umkehrung

kehrung vorzunehmen, die jedes verlangte Glied ausser der Ordnung giebt, und das Gesetz des Fortgangs auf die deutlichste Art vor Augen legt, auch kann man jeden besondern Fall aus dem allgemeinen leicht ableiten, und es macht nicht mehr Mühe x^{ε} aus $y^{\rho} = ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} +$ ꝛc. als x aus $y = ax + bx^2 +$ ꝛc. zu suchen. Die de la Grangische Formel, (hier S. 102, 110), die Herr Professor Fischer (Vorr. S. V) sehr irrig (hier Note v. S. 174) für allgemein aufgelößt und erwiesen glaubt, und welche die Umkehrung vermittelst der höhern Differenzialen bewirkt (hier S. 110), bleibt gegen die Eschenbachische und Hindenburgische zurück, weil jene die Grössen schon in leichten combinatorischen Zeichen gut geordnet darstellt, welche man nach de la Grange durch successive Differenziation erst suchen muß, die letzte hingegen auf Verkürzungen führet, die beide nicht kennen.

Wenn Herr Fischer (§. 100. f. w) die Umkehrungsformel auch auf die numerische Extraction irgend einer Wurzel aus einer vorgelegten Zahl anwendet, und der Recensent sein Verfahren sehr weitläuftig findet, so ist hierbei zu bemerken: daß die Fischerische Anwendung der Formel auf diesen Fall ungefähr eben das ist, als wenn Jemand, wie man wohl zuweilen auch gethan hat, das Verfahren, nach welchem in dem höhern Calcul die Quadraturen durch Integration gesucht werden, auf den Triangel anwendet, wofür jenes Verfahren nicht ist erfunden worden; auch wird das gewählte Beispiel durch die weitschweifige Art, mit welcher Herr Fischer von seinen Dimensionszeichen bei der Anwendung (hier S. 57 — 60) Gebrauch macht (das kürzere, simplere Verfahren hatte nehmlich Herr Professor Hindenburg vorlängst in Besitz genommen) noch weitläuftiger. Indessen hat Herr Fischer das Exempel nur gewählt, um die Extension der Umkehrungsformel, als allgemeiner Auflösungsreihe, daran zu zeigen, und läugnet keinesweges (§. 99) daß man die Wurzel auf andere bekannte

Arten

Arten leichter und kürzer finden könne. Wie man übrigens Umkehrungs-Verfahren auf Wurzelausziehungen benutzen könne, hat unter andern schon Colson nach Newton gezeigt, dessen Benehmen dabey Herr Hofrath Kästner (An. endl. Gr. §. 694 — 698) kurz und bündig erläutert hat.

So viel in Beziehung auf einige Aeusserungen der oben erwähnten Recension, die sonst leicht misverstanden werden könnte.

Noch muß ich, nach eben der Gerechtigkeitsliebe, nach welcher ich in der vorliegenden Schrift so viel gegen Herrn Fischer erinnert habe, ganz unpartheiisch auch das Urtheil des Recensenten, der seine Verdienste bey seinem Buche reiflich erwogen, und nach einem genauen Maaßstabe abgemessen hat, unterschreiben, und dadurch das im Anfange der Note k Gesagte noch etwas genauer bestimmen. Recensent sagt nehmlich: „In „Herrn Fischers Schrift herrscht sehr viel Fleiß, Ordnung und Deutlichkeit" so viel als ohne Beibringung rein combinatorischer Begriffe und der Discerptionsaufgabe (hier S. 77 bis 89) möglich ist. „Das eigene „Verdienst des Verfassers besteht vorzüglich darinnen, „daß er seine Bezeichnungsmethode auf sehr viel Gegen„stände der Analysis angewandt, und insbesondere man„che Gesetze in den Reihen vollständiger, als bisher, ent„wickelt hat." Man hat dadurch auf einmal eine Menge ausführlich evolvirter, zum Theil sehr nützlicher, auch hin und wieder mit guten Bemerkungen versehener, Reihen erhalten, die, wenn sie schon nicht alle in der simpeln Gestalt erscheinen, die eine verbesserte Analysis und ausdruckvollere Zeichen ihnen hätten verschaffen können, dennoch eben dadurch zu weitern Beobachtungen Veranlassung geben, und so, selbst dem combinatorischen Analytiker, wie ein ausführliches Exempelbuch, nützlich werden können. Sehr zu bedauern ist es freilich, daß Herr Fischer sich nicht der vollkommnern Hindenburgischen Zeichnung be-

bedient hat; um so mehr, da überdies, wie jeder weis und auch sein Recensent ausdrücklich erinnert hat, eine übereinstimmende Sprache auch in der Analysis so vortheilhaft ist. Ein Theil dieser Unbequemlichkeit, vornemlich was die Umsetzung der Dimensionszeichen in Combinationszeichen, sowohl gleichartiger gegen einander, als auch vollzähliger, wie sie Herr Fischer nennt, in verkürzte und umgekehrt, anbetrifft, ist durch die am Ende dieser Schrift beigefügten Tafeln zwar gemildert oder vielmehr ganz aufgehoben worden; dennoch bleiben hierbey viele sehr wirksame darstellende Hindenburgische Zeichen noch zurück, die Herr Fischer nicht benutzt hat, und die der Leser nach Kenntnissen aus Nov. Syst. Comb. zum Theil auch nach Beispielen aus gegenwärtiger Schrift, den Fischerischen Formeln muß anpassen lernen, wenn er sie ganz so kurz und expressiv gezeichnet haben will, als sie die combinatorisch-analytische Behandlung und Sprache darstellen kann. Ich bin überzeugt, es lassen sich keine Zeichen angeben, die an sich ausdrucvoller und im Zusammentreffen mit einander passender sind, als die Hindenburgischen. Mehrere von ihnen kann man auch in der gewöhnlichen Analysis mit grossem Vortheil anwenden, und die bereits durch den Gebrauch bewährte Vortreflichkeit derselben, wird ihnen gewiß bald eine allgemeine Aufnahme in die Analysis verschaffen, um so mehr, da bei solchen Vorschritten, als bereits gethan worden sind, die Gründe des combinatorisch-analytischen Calculs in den Anfangsgründen der Analysis nicht länger entbehrt werden können, und nach Herrn Professor Pasquichs Urtheile *) schon längst verdient hätten, in die Lehrbücher aufgenommen zu werden. Den höchsten Werth dieser symmetrischen ganz harmoni-

*) Unterricht in der mathematischen Analysis; Erster Band, Vorrede S. XI.

monischen Zeichen lernt man erst bey ihrer Anwendung in der combinatorischen Analytik vollständig kennen.

Diese Schrift ist keineswegen, wie man etwa aus ihrer Veranlassung vermuthen könnte, durchaus polemisch. Das würde das Publikum, für die sie bestimmt ist, zu wenig interessiren, und die Geduld der Kenner ermüden. Ich habe mich vielmehr, so wie sich Gelegenheit und Veranlassung dazu zeigte, über mehrere Gegenstände, so wie über die Gründe der combinatorischen Analytik etwas ausgebreitet; was zur Geschichte dieser merkwürdigen Erfindung gehört, für philosophische Denker mit beigebracht; und den Zweck zugleich mit dahin gerichtet: zu mehrerer Aufnahme einer Wissenschaft von so ausserordentlichem Umfange und den wichtigsten Folgen, an welche Leibnitz — dem die Idee davon und deren künftige Realisirung beständig vorschwebte — nicht ohne einen hohen Grad von Enthusiasmus denken konnte*), voriezt und zur künftigen bessern Beförderung derselben, etwas, sey es auch noch so wenig, beizutragen.

Leipzig den 1 May 1793.

*) Leibnitz dachte sich, ausser der mathematischen Analysis, noch eine andere weit allgemeinere, die er Analysin supremam nennte und die er beide durch die Combinationslehre zu verbessern gedachte. Ad eam constituendam, sagt er ausdrücklich, opus est *Alphabeto cogitationum humanarum*, et ad inuentionem eius Alphabeti opus est *Analysi axiomatum* — quod mihi in rebus intellectualibus summum videtur. Auch hielt er ein *genus Calculi* etiam non — Mathematicis *accommodati* nicht für unmöglich (Opp. T. III p. 54) wofür auch der scharfsinnige Lambert (log. u. phil. Abh. 1 B. u. a. O.) so viel gearbeitet hat. Das alles mag ich nun eben so wenig, als Herr Professor Hindenburg, verbürgen. Wir wollen lieber die von Letzterm für die gewöhnliche Analysis aufgefundenen und bereits ad liquidum gebrachten Vortheile ungestört geniessen und möglichst erweitern, indessen aber die Resultate der eben itzt in Revolution begriffenen Philosophie, nach beendigter Umwälzung, geruhig abwarten.

I.

Anzeige der Fischerischen Schrift über die Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältniß zu den Hindenburgischen combinatorisch-analytischen Werken.

Die Veranlassung zu gegenwärtiger Schrift hat das von Herrn Professor Ernst Gottfried Fischer zu Berlin, im Verlage der Hallischen Waisenhausbuchhandlung, herausgekommene Werk gegeben:

„Theorie der Dimensionszeichen, nebst ihrer Anwen-
„dung auf verschiedene Materien aus der Analysis
„endlicher Größen. Erster und zweyter Theil, 1792.
„nebst 9 Tabellen."

Mit Erstaunen fand ich hier, die schon über 14 Jahre gegründete [a]) wichtige — Theorie der combinatorischen Analytik — meines würdigen Lehrers, Herrn Professor Hindenburgs, als eine ganz neue Erfindung des Herrn Professor Fischers, in einem blos etwas veränderten Gewande, aufgeführt, und diese, in so eigener Autorität, als sein Eigenthum angegeben, daß es in den Geschichtsbüchern der Wissenschaften vielleicht ein Beyspiel von Dreistigkeit ohne seines gleichen ist. Herr Fischern wegen eines solchen Plagiums vor dem Tribunal des gelehrten Publikums gehörig zu belangen und ihn mit den treffendsten Beweisen zu überführen: daß er weder zweyter ursprünglicher, oder Nach-

a) Die beiden ersten hieher gehörigen Schriften von Herrn Prof. Hindenburg sind vom Jahre 1778. Man sehe die Note q.

Nach-Erfinder, sondern blos anmaßlicher Nachbilder der Hindenburgischen Theorie sey; dieses schien mir, theils der Wichtigkeit des Gegenstandes, theils seines ersten und einzigen Erfinders, theils des Interesse wegen, das ich immer daran genommen habe, schuldige und unerlaßliche Pflicht zu seyn.

Erst spät bekam ich, am 25sten November 1792, zufälligerweise von dieser sonderbaren Erscheinung Notiz. Es war das Fischerische Werk dem Herrn Oberhofgerichtsassessor Gehler allhier, dessen weit ausgebreitete physische und sehr gründliche mathematische Kenntnisse allgemein anerkannt sind, zugeschickt und er gebeten worden, eine Recension davon für die Leipziger gelehrten Anzeigen zu veranstalten. Mit Verwunderung nahm dieser würdige Mann in dieser Schrift die offenbarsten Eingriffe in fremdes Eigenthum, und die so ganz dreisten Anmaßungen desselben gewahr; und es konnte daher nicht fehlen, daß der Vorgang der ganzen Sache sogleich dem angezeigt wurde, der am meisten dabey interessirt seyn mußte: dem Urheber der neufundirten Combinationslehre und der darauf gebaueten combinatorischen Analytik. Ohne diese oder eine ähnliche Veranlassung, wäre Herrn Professor Hindenburg, und wahrscheinlich auch mir dieses Wagstück vielleicht jetzt noch unbekannt; dieses Wagstück der Fischerischen Eingriffe und Anmaßungen, wo schon eine bloße Ocularinspection jenes Werks und der hieher gehörigen Hindenburgischen Schriften, die größte Affinität, und eine nur flüchtige Vergleichung derselben die strengste und vollkommenste Identität, wo nicht durchgängig derselben Gegenstände, doch ihrer Behandlung, nach der dabey gebrauchten Methode, selbst der Zeichen, verräth, in so fern andere Benennungen derselben Dinge, und außerwesentliche, blos aufs äußerliche gehende, Abänderungen u. s. w. hierbey in gar keine Betrachtung kommen.

Man kann leicht urtheilen, welche Gefühle des Unwillens dieses Plagium bey Herrn Hindenburg erregen mußte, zumal, da Herr Fischer bey Festsetzung und Erklärung der von ihm sogenannten Dimensionszeichen und ihres ausgedehnten Gebrauchs, zu bequemer Auflösung der mannichfaltigsten analytischen Probleme, vornehmlich über die Reihen, in so zuverläßigem Tone den ganzen Inbegriff der Hindenburgischen combinatorisch-analytischen Methode, als das Resultat seiner eigenen Scharfsinnigkeit angiebt; oder, da er Herrn Hindenburg die Priorität der so viele Jahre vor der Ausgabe seines Werks gemachten Entdekkung, und völlig ins reine gebrachten Theorie, nicht streitig machen kann, sich doch stellt, als habe er von Herrn Hindenburgs dahingehörigen Schriften gar nichts gewußt, solche bey seinem Werke nicht benutzt, habe alles aus sich selbst ausgesonnen, und jene Erfindung durch seine Dimensionszeichen wohl gar noch zu einem höhern Grade der Vollkommenheit gebracht, und ansehnlich verbessert und erweitert.

Wäre Herr Fischer zu seiner angeblich neuen Theorie auf einem ihm eigenen Wege gelangt, und nur blos zulezt auf die nemlichen Resultate und Ausdrücke mit Herrn Hindenburg getroffen; wie das bekannte merkwürdige Beyspiel der Erfindung der Infinitesimalrechnung zeigt, wo Newton und Leibnitz auf ganz verschiedenen Wegen, beyde zulezt gleichwohl an einem Ziele zusammenkamen; oder, wie die von Johann Bernoulli veranlaßte speciellere Untersuchung über die Brachystochrona, für Punkte, die von gleichförmig beschleunigenden Kräften, wie unsere Schwere nahe bey der Erde, getrieben werden; wo sowohl Er selbst, als sein älterer Bruder Jacob, und Huygens und Newton und Leibnitz und Hospital, so verschieden auch die Wege waren, die sie gingen, doch zulezt alle in der gemeinen Cykloide sich vereinigten: so wäre in einem solchen Falle, doch wenigstens

stens die Wahrscheinlichkeit der Nacherfindung auf Herrn Fischers Seite. Daß aber das gar nicht der Fall sey, daß Herr Fischer keinesweges Selbst- oder Nacherfinder der combinatorischen Analytik, ja daß er nicht einmal Nachahmer in gutem Verstande, sondern bloß anmaßlicher Nachbilder derselben sey; dafür werde ich in der Folge den gültigsten und unverwerflichsten Zeugen — sein eigenes Werk — wider ihn aufführen.

II.

Getroffene Anstalten, um Misbräuche oder Misdeutungen zu verhindern und aufzuheben.

Um aber, bey so bewandten Umständen, einen großen Theil des gelehrten Publikums nicht länger, durch die oben genannte Schrift des Herrn Fischers täuschen zu lassen, habe ich die ganze Sache, wie ich sie gefunden habe, in dem 97sten Stücke der neuen Leipziger gelehrten Anzeigen von 1792 getreulich referirt, auch das Plagium fernerweit in den Intelligenzblatte der allgemeinen Litteraturzeitung, und in der Beilage zum 5ten Stück der Gothaischen gelehrten Zeitung vom 16ten Januar 1793 öffentlich bekannt gemacht. Da es eine Sache von Wichtigkeit ist, den grossen öffentlichen Schatz der Wissenschaften um eine neue Quelle bereichert zu haben: so darf man das Publikum über den Ursprung und die Beschaffenheit einer so lautern und ergiebigen Quelle, die selbst die unzugänglichsten Gefilde der Analysis wohlthätig befruchtet, und nicht weit von ihrem Ursprunge, bereits zu einem großen unübersehbaren Strome sich ergießt, schlechterdings nicht in Ungewißheit lassen. Meinem würdigen Lehrer die so unangenehme Mühe zu ersparen,

sparen, es selbst zu thun, habe ich diese Gelegenheit um so mehr ergriffen, weil ich ihm zugleich dadurch ein dankbares Opfer meiner Verpflichtung darbringen kann.

Es ist zwar durch die so eben angeführten Anzeigen und Nachweisungen der weitern Ausbreitung der Misbräuche und Misdeutungen von Herrn Fischers und solcher Leser Seite, die nicht Kenntnisse genug von der Sache haben, bereits ein Damm gesezt; aber noch ist bey weitem das Wichtigste zurück, und ich bin es selbst meiner Ehre schuldig — die genugthuendste Rechtfertigung alles dessen zu geben, was ich Herrn Fischern in jenen Blättern beschuldigt habe — und diese soll denn nun versprochenermaaßen in dem ausführlichen und unumstößlichen Beweise gegeben werden: daß die Fischerischen sogenannten Dimensionszeichen nichts anders, als absichtlich verstellte und nicht immer zweckmäßig genug gebrauchte Hindenburgische Combinationszeichen sind.

III.

Benehmen in Darstellung der Gründe und deren Anwendung von beiden Seiten, und was Hrn. Fischern auf seine Dimensionszeichen geleitet haben soll.

Schon die Art, wie beyde Gelehrten ihre Theorien aufstellen, und die Verbindung der einzelnen Theile unter einander bey beiden, zeichnet unverkennbar das Original von dem Afterwerke aus.

In der Hindenburgischen Theorie findet man die Grundbegriffe nebst den einfachen und zusammengesetztern Operationen der Combinationslehre vollständig aufgeführt und in den bündigsten Zusammenhang gestellt, wie es die Würde

dieser

dieser Theorie und ihr erhabner Begriff, als primitive Wissenschaft, erfordert, welche die Wurzeln der Arithmetik und Analysis enthält, und früher im Verstande ist, als die Principe von beiden. Auf diesen soliden Grund stützt Herr Hindenburg sodann das ausdrucksvolle System seiner Combinations- und anderer Zeichen, welche, in der genauesten Beziehung auf das Vorhergehende, ihre combinatorischen und analytischen Werthe höchst einfach und lichtvoll darstellen. Jede Art von Zeichen hat in diesem System ihre eigenthümliche Form, durch welche die Bestimmung derselben kenntlich nachgewiesen, jede einzelne von allen übrigen charakteristisch unterschieden, die so fruchtbare Relation der Classenzeichen und Lokalausdrücke, unter und gegen einander, faßlich dargestellt, und zuletzt, bey aller Mannigfaltigkeit der Zeichen, dennoch die bewunderungswürdigste Harmonie [b]) derselben in ihrer Ordnung und Zusammenfügung in den Formeln — das endliche Resultat eines scharfen Ueberblicks und tiefen Nachdenkens — bewirkt und hervorgebracht wird. Aus diesen Elementen baut nun Herr Hindenburg die combinatorische Analytik im Angesichte seiner Leser auf, welche auf solche Weise durch eine vollständige Entwickelung aller Prämissen, nach einer gutgeordneten Gradation von Sätzen, zu einer durchgängig erleuchteten Einsicht des ganzen Verfahrens, gleichsam bey der Hand geleitet, und zuletzt durch eine meisterhaft gezeichnete Karte von den großen Situationen des Ganzen überhaupt, und der detaillirten Darstellung einiger insbesondere, (die wegen ihrer natürlichen Verbindung, in welcher sie mit den übrigen stehen, vorzüglich wichtig waren) aufs genaueste unterrichtet

b) Von diesen consonirenden Akkorden der Hindenburgischen Zeichen, in der Folge. Sie können selbst Veranlassung zu Erfindung wichtiger Sätze geben. Herr Professor Fischer hat diese große Harmonie bey seiner Bezeichnung ganz zerstört.

terrichtet werden, dergestalt, daß sie ohne die geringste Erschwerniß, zur wichtigen Selbstanwendung, nach ihren Bedürfnissen, so gleich fortgehn können. Den Geist dieses so gründlichen und weitaussehenden Werks macht also eine Reihe von gut geordneten Begriffen und Sätzen aus, welche die Möglichkeit einer unendlich mannigfaltigen Anwendung aussagen.

Statt dessen überspringt Herr Fischer das, was bey der Sache das Hauptwerk ist, und führt, ohne das Combinationssystem zum Grunde zu legen, seine Theorie, gleich einem Zauberpallaste, in die Luft empor, läßt in selbigem so viel von den Reichthümern der Hindenburgischen Theorie glänzen, als sein Luftgebäude nur immer hat annehmen und tragen können, und giebt ihm die mystische Ueberschrift: **Theorie der Dimensionszeichen.** Herr Fischer verabsäumt also gänzlich, von dem ursprünglichen Hauptbegriffe der Theorie bis zur lezten Anwendung, dem aufmerksamen Leser genugthuende Auskunft von den allerersten Gründen und ihrem Zusammenhange mit seiner Gedankenfolge zu geben, so daß bey weitern Fortschritten dem, der sich mit vollkommener Einsicht in die Sache befriedigend unterrichten will, am Ende noch, besonders, wenn es zur wirklichen Entwicklung und Auflösung der Zeichen kommt, die Frage übrig bleibt: **Wie soll ich das machen? Woher die Entwicklung nehmen?** Zumal für Fälle, die Herr Fischer nicht selbst im Texte oder in den Tafeln nachgewiesen hat. Bey diesen Fragen verschwindet nun dem getäuschten Leser der luftige Zauberpallast auf einmal, und er sieht sich mit Erstaunen in den weitausgedehnten combinatorisch-analytischen Gefilden verirret, und weiß nicht, wie er dahin gekommen ist! Es ist also die Fischerische Theorie mit einer Reihe zu vergleichen, zu welcher man als **Ergänzung** die Combinationslehre noch hinzu setzen muß, wenn man die Anwen-

Anwendung ganz verstehn, und die allgemeinen Gesetze, die dabey zum Grunde liegen, übersehen will.

Die Hindenburgische Theorie endiget sich mit dem Uebergange aus der Combinationslehre in die Analysis, mit mannigfaltiger Anwendung auf ihre wichtigsten Probleme, und mit den Haupt- und Stammtafeln, welche von unendlichem Gebrauche sind. Alles ist hier von dem allgemeinsten Grundbegriffe bis zu der speciellesten Anwendung lichtvoll und deutlich, alles bis in die ersten Elemente zerlegt und bis auf die letzten Faden abgesponnen: Theorie und Anwendung derselben, Erzeugung und Entwicklung der Formeln und ihrer Zeichen, nach leichten, theils combinatorischen Gesetzen, theils präformirten Tafeln, deren Anfang und Fortgang man ganz übersiehet. Die so vielfach sich durchkreuzenden Fugen schliessen und greifen so vollkommen in einander, dass man die so lange verborgen gebliebene, so enge und innige Verbindung der Analysis mit der Combinationslehre — das Werk der Natur, für welches die Kunst kein Aequivalent nachzuweisen vermag — unmöglich verkennen kann. Daher eben die grossen nicht selten ekstatischen Lobsprüche, die Leibnitz der Combinationslehre in mehrern Stellen seiner Schriften ertheilt [c]), deren überwiegenden Nutzen in der Analysis er ganz übersah, ob er schon nicht im Stande war, seinem Freunde Bernoulli diese Vortheile in ihrem wahren Lichte [d]), selbst nicht an einem

c) Verschiedene, zum Theil sehr ausführliche, Aeusserungen und Lobsprüche Leibnitzens über den Nutzen der Combinationslehre in der Analysis, findet man hier und da in den beiden Hindenburgischen Hauptschriften und ihren Vorreden angeführt, besonders nach der Vorrede zu Nov. Syst. Perm. Comb. ac Variat. p. X — XII.

d) Leibnitzens und Bernoullis hiehergehörige merkwürdige Stellen: Nov. Syst. Comb. p. XVI. not. q. Leibnitzens Vortrag war, aus den im Texte angezeigten Ursachen, dunkel und räthsel-

einem dafür gewählten Beyspiele [e]) anschaulich und begreiflich zu machen. Es gingen Leibnitzen nemlich verschiedene nützliche Einrichtungen, Sätze und bequeme Zeichen in der Combinationslehre noch ab, auf die er anfänglich nicht gedacht hatte, und in der Folge, wegen überhäufter Geschäfte von ganz anderer Art, nicht denken konnte: genaue Abtheilung der zu verbindenden Dinge nach Classen zu bestimmten Summen, bequeme Bezeichnung solcher Classen, und promte Darstellung ihrer Werthe [f]); gerade das, welches, wie die Folge lehren wird, auch Herrn Fischern abging, und was er, ob zwar stillschweigend, von Herrn Hindenburg entlehnt hat, um sein Werk schreiben zu können. Das ist so buchstäblich war, daß, wenn man Herrn Fischern diese entlehnten Zeichen (Dimensionszeichen) nimmt, sein ganzes Werk, in so fern sich solches durchgängig auf sie und ihre combinatorische Entwickelung gründet, plötzlich und auf einmal vernichtet wird.

Ganz eine andere Wendung nimmt die Fischerische Theorie in ihrem Uebergange zur Analysis. Anstatt die Leser

räthselhaft. Es fehlte ihm, was die Analysis sonst hat, und die schönen Künste so eifrig zu erreichen suchen — die Darstellung. In der combinatorischen Analytik, nach der Hindenburgischen Bezeichnung, scheint diese Baukunst der Elemente ihre Vollkommenheit erstiegen zu haben.

e) Die Umkehrung der Reihen betreffend. Man sehe die Vorrede zu Hindenb. Infin. Dign. p. XV — XVIII.

f) Leibnitzens hiehergehörige Lex Combinationis (Ebend. p. XVI, und die dortige Anmerkung) ist äußerst dunkel und schwierig, daher auch de Moivre sagt: peritia hic haud vulgari in combinationum doctrina opus est. Leibnitz hat die Schwierigkeit selbst gefühlt, und sagt von den Zahlenzerfällungen in mehrere Theile ausdrücklich: ubi plures partes admittuntur, ingens panditur abyssus discerptionum (p. XXI. Anmerk.) Diese Abyssum nun, dieses Barathrum, hat Herr Fischer offen gelassen, und, was noch schlimmer ist, seinen Lesern verheimlicht.

ser mit dieser so engen Verkettung der Combinationslehre mit der Analysis bekannt zu machen, zu zeigen, wie aus jener, was er Dimensionszeichen nennt, eigentlich aber Combinationszeichen (combinatorische Classenzeichen) nennen sollte, ganz natürlich hervorgehen, unterschlägt er vielmehr die Gründe, die man kaum mit einem Blicke an dem Eingange seines Werkes gewahr wird, eilt sogleich zu Erklärung seiner willkührlich so genannten Dimensionszeichen fort, und nachdem er hier den Leser in eine dunkle Reihe gar nicht oder nicht hinlänglich bewiesener Folgerungen und Sätze verwirret hat, (wie §. 37. 38. u. s. w. zeigen,) geht er zu der Anwendung auf analytische Aufgaben über, wo er zwar Proben guter analytischer Kenntnisse giebt, die aber sämmtlich auf sein grund- und bodenloses Dimensionszeichensystem sich beziehn, und also für Leser, die überall feste Ueberzeugung suchen, ganz ohne Nutzen verwendet werden. Auf diesem Wege bringt Herr Fischer sein Werk zu Ende, und stellt zuletzt die Hauptresultate in seinen Tafeln dar, läßt aber, wie schon gesagt, den Leser die ganze Schrift hindurch über die Entwickelung seiner Dimensionszeichen nach festgesetzten Regeln (worauf doch eigentlich alles ankommt) in Ungewißheit, schiebt ihm dafür eine Tafel g) unter, die zwar die ersten entwickelten Glieder enthält, von deren Einrichtung und Erweiterung aber der Leser gar nicht unterrichtet wird; aus dem sehr wichtigen Grunde — weil diese Tafel ganz aus der Hindenburgischen travestirt ist, die dafür nöthigen Zerfällungen der Zahlen aber zu bestimmten Summen in Herrn Fischers Texte sowohl als in seinen Tafeln genau diejenigen sind,

g) Die erste von Herrn Fischers Tafeln, mit der Ueberschrift: Entwickelung der Dimensionszeichen. Sie ist ganz die Hindenburgische, (Infin. Dign. p 166. 167.) blos travestirt, und gründet sich auf dessen Discerptionsproblem (ib. §. XXII.)

sind, die Herr Hindenburg zuerst angegeben, und bündig erwiesen hat.

Endlich findet man in den Hindenburgischen hieher gehörigen Schriften die frühern Spuren und die vorzüglichsten Werke seiner Vorgänger, welche Bezug auf die Combinationslehre haben, selbst mit in Rücksicht ihres Nutzens in der Analysis, treulich und sorgfältig angemerkt.

Statt dessen findet sich in dem Werke des Herrn Fischers auch nicht eine einzige nachrichtliche Anzeige, was vor ihm etwa, in Beziehung auf seine Dimensionszeichen und deren Gebrauch in der Analysis, bekannt gewesen sey? oder, da er nun einmal für den Schöpfer dieser Zeichen sich auszugeben entschlossen war, ob ihm nicht hier und da, aus der Nähe oder Ferne, ein dunkler Schimmer ähnlicher Zeichen vorgeschwebt habe, und ob nirgends ein Surrogat seiner Zeichen anzutreffen sey, das, im Gefolge und in Verbindung mit andern zweckmäßigen und bequemen Zeichen, den Gehalt der seinigen nicht blos aufwiege, sondern in allem Betracht überwiege? Und wenn man auch Herrn Fischern dies lezte Geständniß, aus Schonung, noch erlassen wollte: so muß es doch jedem Leser von Einsicht befremdend vorkommen, daß alle seine Sätze so dastehn, als hätte er sie sämmtlich aus der Fülle seines Genies geschöpft, und als wäre vor ihm nie so etwas in irgend eines Menschen Kopf gekommen. Mich wundert, daß Herr Fischer nicht durch eine Stelle am Schlusse der Vorrede der kleinen aber trefflichen Schrift des Herrn Prof. Pfaff in Helmstädt, die er doch verschiedenemal in seinem Werke angeführt und benutzt hat, daran erinnert worden ist.

„Litterarische Nachrichten (sagt Pfaff) habe ich überall „eingestreut, vornemlich aus dem Grunde, weil ich es für „eine Schuldigkeit, zumal eines angehenden Schriftstel„lers, halte, zu zeigen, daß er sich mit dem Vorzüglich„sten, was über den Gegenstand seines eigenen Nachden-

„kens

„kens ist geschrieben worden, wenigstens eh' er seine Ideen „öffentlich vorlegt, bekannt zu machen gesucht habe. In „der Analysis ist diese Vorsicht um so nothwendiger, da sie „ihre Kenner besonders in den Stand sezt, Wahrheiten „für sich zu erfinden, die vielleicht von andern vorher sind „erfunden worden; wobey man das Vergnügen, etwas „zuerst zu wissen, mit demjenigen vertauschen muß, gleiche „Gedanken mit andern vortreflichen Männern gehabt zu „haben."

Aber darauf durfte sich Herr Fischer freylich nicht einlassen, um sich nicht dem für ihn so gefährlichen Dilemma auszusetzen: entweder ganz unwissend in dem, was zur Litteratur des von ihm abgehandelten Gegenstandes gehört, vor dem Publikum zu erscheinen, oder Herrn Hindenburgs combinatorisch-analytische Schriften häufig anzuführen, mit dem er nun einmal in seinem Werke nichts zu thun haben will, besonders nachdem er ein nach seinen Gedanken sehr wirksames Mittel ausgefunden hatte, seiner mit ein paar glatten Worten und Lobeserhebungen in der Vorrede los zu werden.

IV.

Wie Herr Prof. Hindenburg auf seine Combinationszeichen und deren Anwendung in der Analysis gekommen. Angebliche Veranlassung der Fischerischen Dimensionszeichen. Der Grund der Theorie dieser Zeichen fällt außerhalb des Fischerischen Werks, in die Hindenburgischen combinatorisch-analytischen Schriften.

So verschieden aber überhaupt das Verfahren ist, welches beide Gelehrte bey Aufstellung ihrer Theorie beobachtet ha-

ben: so verschieden und einander ganz entgegengesezt sind auch die Veranlassungen, nach welchen der eine, wie er deutlich und ausführlich darthut, auf seine Combinationszeichen wirklich gekommen ist, der andere seine Dimensionszeichen gefunden zu haben vorgiebt.

Herr Hindenburg suchte nemlich die Erhebung der Reihen zu jeder verlangten Potenz von den bekannten Schwierigkeiten bey deren Entwicklung zu befreyen, und alles dabey auf so leichte und allgemeine Regeln und Vorschriften, wie die des Newtonischen Binomialtheorems sind, zu bringen. Das beweiset Vorrede und Inhalt seiner Schrift: de Infinitinomii Dignitatibus, worin er das Verfahren seiner Vorgänger in dieser Untersuchung, Jacob Bernoulli's, de Moivre's, Colson's, Castillon's, Eulers, Segners, Kästners, getreulich vorlegt, unter einander vergleicht und (S. 69 — 100; 113 — 120; 145 — 151) sein eigenes Verfahren, in Combinationszeichen ausgedrückt, ausführlich vorträgt und durch Beispiele erläutert. Herr Hindenburg stüzt und gründet sein Verfahren auf die combinatorische Aufgabe (S. 73 u. f.) von Zerfällung jeder gegebenen Zahl nach Classen in zwey, drey, vier und mehrere Theile, die immer zusammen dieselbe Summe ausmachen; deren Auflösung und Beweis vor ihm noch Niemand, am allerwenigsten aber zu Anwendung auf die Analysis brauchbar, gegeben hatte. Es zeigte sich bald, was man zwar vermuthen konnte, aber nicht in dem Grade, wie man es fand, erwartet hätte, daß diese combinatorische Auflösung der Aufgabe über die Potenzen der Reihen, die Basis von unzähligen andern sehr wichtigen, oft sehr verwickelten Aufgaben über die Reihen sey, dafür auch Herr Hindenburg seinen Methodum Potentiarum (S. 100 — 113.) als einen bequemen Uebergang aus dem allgemeinen Potenzprobleme in andere verwandte fand; welchem er weiter hin (S. 127 bis 145) die allgemeine Evolution der Reihen aus polynomischen

mischen Factoren beyfügte, und dabey (S. 129 — 135.) ein zweytes (eben so allgemeines als das erste) combinatorisches Problem, von Zerfällung gegebener Zahlen nach Classen, in zwey, drey, vier und mehrere Theile, die immer dieselbe Summe ausmachen, und deren Theile zugleich auf alle mögliche Art unter einander verwechselt sind, vortrug, umständlich auflösete und erwies.

Herr Hindenburg stieg also von dem combinatorischen Grundproblem, dessen Auflösung ihm zu den Zerfällungen der Zahlen nach bestimmten Summen, und dadurch zu den Combinationsclassen und ihren Zeichen verholfen hatte, zu den darauf sich gründenden einfachern und zusammengesezten analytischen Aufgaben auf. Nicht so Herr Fischer, der, um, wie die Folge lehren wird, einen Meisterstreich auszuführen, die Sache gerade umkehrt, wenigstens, seinem Vorgeben nach, sich so verhalten hat. Doch wir wollen ihn selbst reden lassen: „Die erste Veranlassung (sagt „er in der Vorrede) zu den analytischen Untersuchungen, „denen das gegenwärtige Werk sein Daseyn verdankt, war „das so oft gefühlte Bedürfniß einer allgemeinen Auflö„sungsmethode durch unendliche Reihen. Ich fiel bey „diesen Untersuchungen auf eine neue Bezeichnungsart, die „ich in der Folge über meine ersten Erwartungen brauchbar „fand, indem ich dadurch in dem Stand gesezt wurde, nicht „nur jenes Problem auf die allgemeinste, und für die An„wendung bequemste Art aufzulösen, sondern überhaupt „fast alle analytischen Arbeiten mit vielgliedrigen Größen, „oder unendlichen Reihen, sehr abzukürzen und zu erleich„tern, ohne weder bey jenem Probleme, noch bey diesen „Arbeiten die Rechnung des Unendlichen zu Hülfe nehmen „zu dürfen. Die Theorie dieser Zeichen, die ich Dimen„sionszeichen genennt habe, nebst mancherley Anwendun„gen derselben, machen nun den Gegenstand dieses gegen„wärtigen Werks aus. Hätte ich de la Grange's Auflösung

„dieses

„dieses Problems früher gekannt — so würde ich vielleicht „neue Schritte nicht versucht haben; und so wäre wahrscheinlich die Veranlassung, welche mich auf jene Zeichen „leitete, weggefallen."

Und diese so eben angeführten Worte und Behauptungen sind zugleich das feyerlichste Bekenntniß, daß Herr Fischer gar nicht der Erfinder von der Theorie der Dimensionszeichen ist. Denn, da er den Grund dieser Theorie in die Untersuchungen über die allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen legt; es aber gar nicht möglich ist, diese Untersuchungen mit Erfolg vornehmen zu können, bevor nicht das Problem oder Theorem über die Dignitäten eines Infinitinomiums in seinem ganzen Umfange völlig ins Reine gebracht ist; (wie alle Kenner zugeben werden, auch selbst aus dem Fischerschen Werke erhellet, wo die Dignitätenaufgabe, (§. 44, 67, 70.) zuerst in Ordnung gebracht, und nachher bey der allgemeinen Auflösungsmethode durch unendliche Reihen, für den Beweis der Aufgabe in §. 94 (S. 69.) nun weiter angewendet wird) so fällt demnach der Grund von der Theorie der Dimensionszeichen zunächst in die Untersuchung über die Potenzen vielgliedriger Ausdrücke; wie denn auch Herr Fischer an einem andern Orte seines Werks (§. 45.) die Aufgabe von Erhebung vielgliedriger Größen zu Potenzen (§. 44.) den Fundamentalsatz für die ganze Theorie der Dimensionszeichen nennt, so daß von der Wahrheit dieses einzigen Satzes alles abhänge, was in seiner ganzen Schrift vorkomme. So wahr dieses ist, so wenig hat vermuthlich Herr Fischer daran gedacht, daß Herr Hindenburg eben das von eben dieser Aufgabe viele Jahre vorher bereits gesagt, ausführlich erwiesen und durch Beispiele erläutert hat [h]), und daß Herr

h) Infin. Dign. Praef. p. XII. XIII. et §. XXIV. und Nov. Syst. Comb. p. III.

Herr Fischer dadurch sein ganzes Werk von dem Hindenburgischen abhängig macht; wo dieser Satz gerade so und in ähnlichen Zeichen, von ähnlicher Bedeutung, ausgedrückt vorkommt. Aber Herr Fischer sagt mit dieser Behauptung noch weit mehr, als er hat sagen wollen. Die Formel für die Erhebung der Reihen zu Potenzen setzt nemlich schon die Kenntniß und den Gebrauch der Combinations- oder Dimensionszeichen (wie man sie auch immer nennen mag) voraus, und diese, wenn sie nicht leere und todte Zeichen seyn und bleiben sollen, die Entwickelung derselben durch Discerptionen oder Zerfällungen in Zahlen nach bestimmten Summen. Es muß also vorerst das Discerptionsproblem auf die geschickte Art aufgelößt seyn, wie es, als wesentliches Element des Polynomialpotenzentheorems, und was damit weiter in Verbindung steht, gehört; und so fällt also der Grund von der Theorie der Dimensionszeichen noch weiter in die Aufsuchung und Festsetzung der Regeln, über die Discerptionen zurück. Nun hat aber Herr Fischer weder in den zwey Bänden seines Werks, noch irgend wo sonst, das Discerptionsproblem gelößt, also ist auch der Grund von der Theorie der Dimensionszeichen gar nicht in seinem Werke enthalten, und fällt folglich außerhalb desselben. Da nun aber Herr Prof. Hindenburg der Erste und Einzige ist, der dieses Fundamentalproblem, zur unmittelbaren Anwendung in der Analysis, brauchbar gelößt hat [i]). Da Herr Prof. Fischer stillschweigend, und ohne ein Wort darum zu verlieren, die Regeln der Hindenburgischen Discerptionsaufgabe in unzähligen Stellen seines Werks (§. 21. 28. 33. 37. 38. 51. 52.

i) Infin. Dign. §. XXII. Ein anderes eben so allgemeines Fundamentalproblem findet sich §. XXVII. 4. seq. Von beiden Herrn Hindenburgs Aeußerungen in der Vorrede p. XXI. und der dortigen Note unter dem Texte.

52. u. s. w.) und in seinen Tafeln (in der ersten unmittelbar, in den übrigen mittelbar) für die Werthe seiner Dimensionszeichen benutzt hat: so fällt der Grund von der Theorie der Dimensionszeichen ganz in das Hindenburgische Werk.

Und so ist denn, nachdem schon lange zuvor die simpel-erhabene Hindenburgische Theorie der combinatorischen Analytik — wie ein hell leuchtendes Gestirn aus den dunklen Wogen des Oceans — auf- und hervorgegangen war, um ewig zu leuchten, das luftige Meteor einer Theorie der Dimensionszeichen ihr gefolgt, und über den Fischerischen Horizont aufgestiegen, um augenblicklich zu platzen [k]).

Diese Deduction, wie Herr Prof. Fischer selbst eingestehn wird, ist so gründlich und zwingend, daß sich nichts dawider einwenden, nichts darauf antworten läßt. Die Erfindung gehört doch unstreitig dem zu, der sie — erfunden hat: dem, welcher zuerst die in dem lezten Resultate der vorgegebenen Aufgaben mit einander zu verbindenden Dinge, in Classen geordnet, diese Classen in bequemen Zeichen

k) Damit wird nicht geläugnet, daß Herr Fischer auch verschiedene gute analytische Untersuchungen, Formeln und Bemerkungen beigebracht hat, die ihren Werth behalten, wie auch übrigens der Weg, auf welchem sie gefunden worden, und die Zeichen, in welchen sie dargestellt sind, beschaffen seyn mögen. Was hier im Texte gesagt wird, beziehet sich lediglich auf Herrn Fischers Theorie der Dimensionszeichen, wodurch er sich anmaaßt, die Hindenburgische Theorie sogar verbessert zu haben. Die erstere kann aber die Vergleichung mit der leztern schlechterdings nicht aushalten, noch viel weniger jene diese verbessern, so wenig als das erborgte Licht des Mondes dem Glanze der hellen Mittagssonne etwas zusetzen kann. Die Fischerischen Dimensionszeichen sind ja doch nur ein Abglanz der Hindenburgischen Combinationszeichen, und verbreiten also nur ein erborgtes und geschwächtes Licht.

Zeichen ausgedrückt, diese Zeichen in die Analysis, in gehöriger Verbindung mit den Binomial- und Polynomial-Coefficienten, vermittelst der combinatorisch-analytischen Formeln eingeführt, und dieser Zeichen Werthe, in jedem vorkommenden Falle, für spätere Glieder so gut, wie für frühere sogleich zu finden, in einer eigenen Aufgabe der Zerfällungen der Zahlen zu bestimmten Summen, so wie in Tafeln, nachgewiesen hat — und das ist ohne Widerrede Herr Professor Hindenburg [1]).

Ich fordere Herrn Fischer auf, zu zeigen, wie ihn die Untersuchung über die allgemeine Auflösungsmethode durch Reihen, auf die Erfindung der Dimensionszeichen geleitet, wo er die Entwickelung und Darstellung der Werthe dieser Zeichen, für alle vorkommende Fälle, bestimmt nachgewiesen, und wo er insbesondere die Zerfällungen für die fünfte Classe der Zahl 13, wie er sie §. 52. aufstellt, hergenommen hat? Davon finde ich weder in dem Abschnitte, worin von der allgemeinen Auflösungsmethode gehandelt wird, noch in dem übrigen Raume seines Werks im geringsten etwas angezeigt. Herr Fischer wird hoffentlich nicht bloße Aeußerungen, wie hier und da (§. 18. 24. 31. 34....) in seinem Werke vorkommen: „man solle nemlich, um den Werth eines vorgelegten Dimensionszeichen „der zweyten, dritten, vierten oder überhaupt pten Ordnung

1) Herr Prof. Hindenburg faßt die Momente, worauf es hier ankommt, und was er dabey gethan hat, kurz so zusammen: Numerorum, ad quas tandem deuenitur, sectiones, Complexionum per varias Classes vicissitudines, Coefficientium, binomialium et polynomialium, disparitas et coniunctio, partium omnium componentium iusta dispositio — et, ad evitandam confusionum, propter nimiam partium constituentium multitudinem, characteres idonei, quibus, quid fieri tandem debeat numerorum subsidio, imperetur. Infin. Dign. paef. p. XX.

„nung zu finden, die Marke dieses Zeichens (welche immer „die zusammenzusetzende Zahl oder Summe, z. B. n an„giebt) auf so viele Arten als möglich, nach Umständen, „aus zwey, drey, vier, oder überhaupt p Marken der er„sten Ordnung, zur Summe n zusammensetzen; dadurch „erhalte man alle Formen der Produkte, die das gegebene „Dimensionszeichen in sich schließt. Zu jeder Form müsse „man dann die Zahl (§. 37. 38.) schreiben, welche anzeigt, „wie oft sich ihre Factoren versetzen lassen, die Summe aller „so formirten Produkte, drücke den gesuchten Werth aus.“ Solche bloße Aeußerungen über die zu findenden Werthe der Dimensionszeichen von höhern bestimmten Ordnungen, oder die auf solche schwankende und dunkel ausgedrückte Aeußerungen sich stützende, höchst unvollständige und mangelhafte Darstellung der Werthe der Dimensionszeichen der unbestimmten pten Ordnung zur Summe $p+4$, wie §. 37 vorkommt m), wird hoffentlich Herr Fischer nicht für eine erwiesene Regel ausgeben wollen. Eben so wenig wird

m) Die Fischerische Darstellung, §. 37. die nur exempelsweise für $p+4$ gegeben ist, aus welcher man aber die allgemeine für $p+n$ abstrahiren soll, sezt die Entwickelung der Zahlen zu bestimmten Summen, 5, 6, 7.... oder $n+1$, $n+2$, $n+3$.... voraus, dafür nirgends eine Regel nachgewiesen worden ist. Die Richtigkeit der Entwickelung für $p+4$ angenommen, wie sie (§. 37.) im Buche steht (solche Forderungen muß sich der Leser von Herrn Fischer gefallen lassen,) wird für $p > 4$ (für $p > n$) Niemand anstoßen. Ob aber, und wie, und warum, die Entwickelung für $p =$ oder < 4 (für $p =$ oder $< n$) wahr und zulässig sey? Das auszufinden, wird des Lesers eigenem Scharfsinne überlassen; der sich nothwendig in Verlegenheit gesezt sehen muß, wenn er hier auf 0 und negative Zahlen stößt, wo er nicht weiß, was er damit anfangen, und was er aus den Gliedern machen soll, durch deren Aufsuchung er auf dergleichen Zahlen verfallen ist. Man vergleiche dagegen Herrn Hindenburgs lichtvolle Formulardarstellung

er im Ernste behaupten wollen, (wie gleichwohl an bereits angeführten Orten, noch ausdrücklicher aber §. 43 geschehen ist,) es habe gar keine Schwierigkeit, alle Produkte, welche irgend ein höheres Dimensionszeichen in sich begreift, gerade zu, und ohne ein weiteres Hülfsmittel oder eine bestimmte Regel, zu entwickeln, und so den Werth desselben anzugeben; oder im Ernste sich vorstellen können, als werden seine Leser so willfährig seyn, was er §. 265 behauptet, auf Treu und Glauben anzunehmen; das Eigenthümliche seiner Dimensionszeichen bestehe nemlich eben darinne, daß in dem Zeichen selbst nebst seiner Marke die Regel liege, nach welcher der Werth desselben bestimmt werden kann; wo offenbar das Was? mit dem Wie? verwechselt wird. Das Erstere wird freilich von dem Zeichen und seiner Marke unmittelbar nachgewiesen, keinesweges aber die Regel für Letztere, die sogar Leibnitz für schwer erklärte [n]). Auch wird die Sache dadurch nicht gebessert und die offen gelassene Lücke gehörig ausgefüllt, daß Herr Fischer die Hindenburgische Tafel (Inf. Dign. p. 166. 167.) abgeschrieben, odrr vielmehr travestirt, und solche als erste Tafel seinem Werke beygefügt hat, um den Gebrauch der Dimensionszeichen so bequem, als möglich, zu machen, (wie Herr Fischer (§. 43.) versichert) eigentlich aber — um die noch nicht überwundenen und nirgends gehobenen (ob solches schon §. 52. S. 34. ausdrücklich versichert wird) Schwierigkeiten dem

darstellung, (Inf. Dign. p. 146, 4.) die sich auf den Inder $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \ldots \end{pmatrix}$ bezieht. Der Fischerische ganze 38ste §. enthält genau die Hindenburgische Entwickelung, (ib. f. 5.) auch gerade eben so weit (und nicht weiter) fortgesetzt, ist aber, wie von selbst bey der flüchtigsten Vergleichung in die Augen fällt, mit aller Unbehülflichkeit der schwerfälligen Fischerischen Zeichen befrachtet und überladen.

n) Man sehe die Note f.

dem Leser weniger fühlbar werden zu lassen, der auch noch über dieses (§. 50.) getröstet wird, bey den ersten Gliedern seyen keine Schwierigkeiten, und gerade diese kommen am häufigsten vor. Bey spätern und über die Gränze der Fischerischen Tafel hinausfallenden Gliedern aber, überläßt er stillschweigend den Leser seiner eigenen Willkühr, oder, wenn dieser etwa nicht im Stande seyn sollte, aus den im Buche häufig vorkommenden speciellen Beyspielen, eine allgemeine Regel der Zerfällung zu abstrahiren — der Leitung des Herrn Professor Hindenburgs, dessen Schriften aber, und also auch nicht die hieher gehörige Stelle daraus, anzuführen Herr Fischer aus bekannten Ursachen sich nicht getraut hat.

Eben dieser Leitung bedarf auch der Leser, wenn er wissen will, wie die Versetzungszahl zu einer gegebenen Form oder einem einzelnen Gliede einer gewissen Dimensionsordnung zu finden sey? denn aus §. 37 und 38. (wo der Leser nicht einmal deutlich sieht, oder ihm nachgewiesen wird, wie er das Vorgelegte andern Beyspielen sicher anpassen, oder die Formeln weiter fortsetzen soll, wenn er deren Fortsetzung benöthigt ist) wird er das schwerlich lernen und begreifen. Es ist sehr sonderbar, daß Herr Fischer nicht selten, sogar in wichtigen, die Hauptsache wesentlich und unmittelbar angehenden Fällen (wie hier die Zerfällungen der Zahlen nach bestimmten Summen, und die den einzelnen Formen zugehörigen Versetzungszahlen sind,) anstatt bestimmte Vorschriften und Regeln zu geben, blos ihre Anwendung in Beyspielen zeigt, und so fordert, der Leser solle sich die Regel selbst davon abstrahiren. Freylich giebt es ein Verfahren, das Allgemeine im Besondern darzustellen, jenes durch dieses zu rechtfertigen und auf eine leichte Art nachzuweisen und begreiflich zu machen, wie schon de Moivre o) erin-

o) A Method of arguing about generals by particular Examples — very convenient for easing the Readers Imagination. The Doctrine of Chances; by Abr. de Moivre Pref. p. VIII. IX. sec. Edit. 1738.

erinnert hat, und Herr Prof. Hindenburg diesen Weg verschiedenemal mit Vortheil eingeschlagen ist. Aber das Verfahren dafür ist von dem Fischerischen himmelweit verschieden. Daß Herr Fischer durch seine stillschweigende Anforderung, die allgemeine Regel, aus der bloßen Anwendung derselben, sich selbst zu abstrahireu, den Leser offenbar täusche, davon kann sich ein Jeder, der das Verfahren nicht sonst schon weiß, von dem hier die Rede ist, sogleich überzeugen. Er suche die Regel aus dem Fischerischen §. 37. 38. zu abstrahiren; wie viel Mühe wird ihm das nicht kosten! Und uun schreibe er einmal die Versetzungszahl zu der Hindenburgischen allgemeinen Form $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}e^{\epsilon}$....... oder der besondern $a^{10}b^{9}c^{8}d^{7}e^{6}f^{5}$! Weiß er sich hier nicht zu helfen, so erhole er sich Raths bey Herrn Prof. Hindenburg p), der ihm sogleich bestimmte Auskunft geben, oben drein noch einen Beweis der Regel vorlegen, und weiter nachweisen wird, wie man die Versetzungszahlen, wenn man sie nicht durch die Formel suchen will, aus der sogenannten tabula mirificia, als Polynomialcoefficienten, nehmen könne. Aber solche Hülfsmittel hat Herr Prof. Fischer entweder selbst nicht gekannt, oder vorsetzlich nicht kennen wollen!

Herr Fischer hat also seine Dimensionszeichen, die sich in ihren Werthen einzig und allein auf Zerfällungen gegebener Zahlen in verlangte Theile und dieser Theile Zusammensetzung zu bestimmten Summen, mit Beyfügung der zugehörigen Versetzungszahlen, stützen; diese Dimensionszeichen und ihre Werthe, auf denen doch endlich alles beruht, diese hat Herr Fischer — auf Nichts gegründet.

V. Herr

p) Nov. Syst. Perm. p. XXIII. XXIV. 23; Infin. Dign. p. 31. 32. ingleichen 34. 35. wegen des Gebrauchs der Tabulae mirificae für Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten.

V.

Herr Fischer läugnet, daß er Herrn Hindenburgs combinatorisch-analytische Schriften vor Erfindung seiner Dimensionszeichen gekannt habe. Ob, und wie sich so etwas denken lasse?

Das bisher Beygebrachte könnte hinreichend seyn, die Leser, selbst solche, denen combinatorische Verfahren nicht so ganz geläufig sind, in Stand zu setzen, selbst ein Urtheil zu fällen. Aber Herr Fischer geht in seinen Behauptungen noch weiter, und macht daher eine etwas detaillirte Untersuchung und Darstellung der Sache nothwendig.

Herr Fischer läugnet in der Vorrede geradezu, daß er die Hindenburgischen combinatorischen Schriften, (z. B. sein Novum Systema Combin. Lipsiae 1781.) vor dem Anfange seiner Untersuchungen gekannt habe; dies Buch sey ihm blos in der Folge, das heißt: nachdem er bereits seine Erfindung aufs Reine gebracht, und er von Herrn Hindenburg nun nichts habe lernen können, was er nicht schon zuvor aus sich selbst gewußt habe, bekannt geworden. Ueberall in seinem Werke spricht er von seinen Dimensionszeichen, als von ganz neuen ihm eigenen Zeichen, und versichert in der Vorrede ausdrücklich, was in Herrn Hindenburgs (dem bey seiner Methode und Zeichnungsart vielleicht mehrere Hindernisse und Schwierigkeiten aufgestoßen wären) mitgetheilten Entwurfe von Problemen (Nov. Syst. Combin. p. XXVI — XXXII.) wirklich auflösbar seyn möchte, dürfte es vielleicht — wenn anders die Eigenliebe ihn nicht gänzlich täusche — nur allein durch die einzige einfache und leichte Bezeichnungsart seyn, deren er sich in seinem Werke bedient habe. Man kann unmöglich lauter und vernehmlicher

licher von Composses und Melioration sprechen, als Herr Fischer hier gethan hat; und so hat er auch in den beiden Theilen seines Werkes, zusammen an 346 Quartseiten, der Hindenburgischen Schriften nicht weiter mit einer Sylbe Erwähnung gethan, spricht immer und überall von allen Vorschriften, Verfahren, und in Dimensionszeichen ausgedrückten Formeln, als von den seinigen, und ist so seinen Weg, ohne Geleitsmann, wie es scheinen möchte, fortgegangen — unbekümmert, wer und was ihm etwa auf diesem Wege begegnen könnte.

Ich muß gestehen, daß ich Aeußerungen und Behauptungen von Herrn Fischer, wie die so eben angeführten, mehr als einmal gelesen und erwogen habe. Ich traute kaum meinen eigenen Augen, suchte manchen Worten und Ausdrücken einen andern Sinn, als den sensum communem, unterzulegen, so sehr schienen mir manche von Herrn Fischers Behauptungen wider den lezten zu verstoßen. Endlich glaube ich doch in den Hintergrund seiner Gedanken gedrungen zu seyn und ihren räthselhaften Aufschluß gefunden zu haben. Die Sache sieht einer Selbsttäuschung nicht unähnlich. Alle Worte und Aeußerungen sind freylich in der gewöhnlichen Bedeutung zu nehmen, und sollen auch, nach Herrn Fischers Absichten, so genommen werden; aber indem er sie niedergeschrieben, hat er sich vielleicht manche täuschende süsse Hoffnung und Aussicht von Verborgenbleiben und Unsterblichkeit des Namens vorgespiegelt. Wenn Herr Fischer in der Vorrede sagt: Er habe auf dem Wege, wo er anfänglich ganz einsam zu gehen gewähnt, in der Folge auch Herrn Prof. Hindenburg gefunden; so hat er vielleicht dabey gedacht: da Herr Hindenburg sich so viel eher, nemlich 11 Jahre (eigentlich 14 Jahre) früher, als das Werk von Herrn Fischer im Publikum erschien, sich auf den Weg gemacht hat, so sey jener schon eine so große Strecke vorwärts, daß er ihn (Herrn Fischer) der jenes

Fußtapfen folge, nicht sehen könne, habe sich auch höchst wahrscheinlich aus Unkunde des Weges, auf dem er sich die Bahn erst habe brechen müssen, und weil er sich nicht allzusichern Führern, den Combinationsgeleitsmännern, überlassen habe, auf und von diesem Wege gar verlohren, so, daß er ihm auf alle Fälle nicht begegnen werde. Diese Voraussetzung hat nun Herrn Fischer so ganz sicher gemacht, daß er gar nicht daran gedacht zu haben scheint, daß, wenn auch nicht Herr Hindenburg selbst, doch vielleicht irgend Jemand von seiner nähern Bekanntschaft, die wir unter seinem Geleite schon oft diesen Weg gegangen sind, ihm unvermuthet aufstoßen und begegnen könnte. Da mich nun der Zufall Herrn Fischer zuerst entgegen geführt hat: so wird er mir zu gute halten, wenn ich in Herrn Hindenburgs Namen ihn anhalte, seine Pässe genauer ein- und nachsehe, und allen angeblichen Befugnissen, diesen Weg für den seinigen auszugeben, selbst der anmaßlichen Behauptung laut widerspreche, als habe er ihn, wenn er auch die Bahn dafür nicht zuerst gebrochen, doch für sich gefunden, ihn mehr geebenet und gangbarer gemacht, auch, zu weiteren und sicheren Fortkommen darauf, in aller Rücksicht, ansehnlich verbessert, und zu einem neuen Wege gleichsam umgeschaffen.

VI.

Es ist höchst unwahrscheinlich, daß Herr Fischer Herrn Hindenburgs Combinationsmethode und deren Anwendung auf die Analysis, aus dessen Schriften, vor dem Anfange seiner Untersuchungen nicht sollte gekannt haben.

Wie wahrscheinlich oder unwahrscheinlich es sey, daß Herr Fischer die Theorie der Dimensionszeichen und ihren Gebrauch

brauch in der Analysis schon zuvor ganz aufs Reine gebracht habe, ehe er etwas von Herrn Hindenburgs combinatorisch-analytischen Schriften zu Gesichte bekommen, wird man am besten aus folgenden Umständen übersehen und beurtheilen können.

Herrn Prof. Hindenburgs hieher gehörige Schriften sind folgende: 1) Infinitinomii Dignitatum, Exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulae. Accessit methodus Potentiarum, problematis solvendis quamplurimis accommodata, et serierum ab Evolutione factorum quotcunque oriundarum Genesis. Editio aucta et emendata. Goettingae 1779. q) 2) Novi Systematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae, et Logisticae Serierum, formulis analytico-combinatoriis, per tabulas exhi-

q) Dies Werk ist schon eine vermehrte und verbesserte Auflage zweener, im Jahre 1778 herausgegebener Gelegenheitsschriften: 1) Infinitinomii Dignitatum indeterminatarum Leges ac formulae. Goettingae 1778. 44 Quartseiten, und 2) Methodus nova et facilis Serierum infinitarum exhibendi Dignitates Exponentis indeterminati, 27 Quartseiten; eine Dissertation, die Herr Hindenburg am 10ten Jun. 1778 in Leipzig vertheidiget hat. Darinne ist §. III. p. 6 — 16 das combinatorische Discerptionsproblem zuerst von ihm vorgetragen, die Auflösung desselben für folgende Classen aus vorhergehenden, sowie für jede einzelne Classe an sich, gezeigt und erwiesen, auch Gebrauch davon auf die Potenzen des Infinitinomiums gemacht worden. Die ersten Localausdrücke und ihre Umsetzung in combinatorische kommen daselbst §. IV. S. 17. und §. V. S. 22. vor. Die erste Anwendung also, die Herr Hindenburg von der Combinationslehre auf die Analysis gemacht hat, und mit ihr die Grundlage zu seiner combinatorischen Analytik, von welcher er nachher, in der neuen vermehrten Auflage der Infinit. Dign. etc. in seinem Nov. Syst. Combin. und in mehrern Stücken des Leipziger Magazins, so viele und ausnehmende Proben gegeben hat, fällt in das Jahr 1778.

exhibendae. Conspectus et Specimina. Lipsiae 1781. 3) Die 6 Bogen lange Vorrede zu Rüdigeri Specim. analyt. de lineis curvis secundi ordinis; in Dilucidationem Analyseos Finitorum Kaestnerianae. Lipsiae 1784. 4) Mehrere Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie, und des Magazins für reine und angewandte Mathematik, von den Jahren 1781 — 1788. Von diesen Schriften sind die beiden ersteren, als Hauptwerke in der Combinationslehre und ihrer Anwendung auf die Analysis, resp. 13 und 11 Jahre vor der Ausgabe der Fischerischen Theorie der Dimensionszeichen im Publikum erschienen, und fallen vielleicht (ich kenne Herrn Fischer nicht weiter als aus seinem Werke) in die Jahre seines frühern oder spätern, und also um so ernstlichern, mathematischen Fleißes. Die Vorrede zu No. 3 zeigt vornemlich in einem specielleren Falle den Nutzen der Permutationen in der Analysis, bey Eliminirung mehrerer unbekannter Größen, aus eben so viel, von einander unabhängigen, gegebenen Gleichungen, mit Vergleichung der von Cramer und Bezout dafür angewendeten Verfahren. Auch dürfte das Buch selbst wohl Herrn Fischers Neugierde haben reizen können, da es Erläuterungen über einen Abschnitt der so allgemein geschätzten Kästnerischen Analysis endlicher Größen enthält. In dem Leipziger Magazine endlich kommen mehrere Anwendungen der Hindenburgischen Combinationslehre auf die Analysis, selbst auf die Diophantische oder unbestimmte Analytik, vor. Die Vorrede zu Rüdigeri Spec. anal. fällt nicht weit vor der Zeit, die spätern Stücke des Leipziger Magazins fallen selbst in die Zeit hinein, um welche herum (mehr als vier Jahre, von der Ausgabe (1792.) seines Werks rückwärts zu rechnen, giebt Herr Fischer in der Vorrede ziemlich unbestimmt an) er die Untersuchungen über die allgemeine Auflösungsmethode durch Reihen, die so überaus wichtige Folgen gehabt haben sollen, angefangen zu haben vorgiebt.

Diese

Diese Schriften also, die zu so verschiedenen Zeiten herausgekommen sind; die Herrn Fischer auf der Laufbahn seines frühern und spätern mathematischen Fleißes gleichsam verfolgt haben; die überall mit Beyfall aufgenommen worden, und fast in allen gelehrten Zeitungen, den Leipzigern, Göttingischen, Hallischen, Jenaischen, Wittenbergischen, ꝛc. (einige davon sind nachher eingegangen) recensirt sind; die Herr Hofrath Kästner [r]) und namentlich die erste der oben angezeigten Schriften, Infin. Dignitatis etc. zu den mehrern Proben der ausnehmend grossen analytischen Scharfsinnigkeit und Arbeitsamkeit rechnet, die Herr Prof. Hindenburg von Zeit zu Zeit gegeben hat: diese Schriften will Herr Fischer, mitten in Berlin, wo die dortige Akademie der Wissenschaften in ihren Memoiren [s]) selbst der beiden Hindenburgischen Hauptwerk (oben No. 1 und 2.) mit vielem Lobe gedenkt;

r) Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäfte, S. 567. 568. Diese lehrreiche Schrift hat Herr Fischer gewiß nicht ungelesen gelassen.

s) In der Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. et belles lettres p. 31—35, wo über Herrn Hindenburgs mechanisch-arithmetische und combinatorisch-analytische Schriften und Erfindungen sehr vortheilhaft geurtheilt wird. Von seinen beiden Hauptschriften im letztern Fache wird (S. 34.) gesagt: *Cette piece* (Nov. Syst. Combin.) *contient une théorie tout à fait nouvelle, à laquelle l'Auteur a été conduit par ses recherches sur les moyens mécaniques de trouver les diviseurs des nombres; et les avantages de cette théorie sont bien plus grands, que ceux qu'offre la méthode qui l'a occasionnée: on trouve dans le petit ouvrage ou l'Auteur la décrit, l'application la plus étendue à l'analyse, particulierement aux series, et même aux cas les plus compliqués que celles-cipeuvent présenter. Quant à l'ouvrage précédent* (Infinit. Dign. Exp. Indet. etc.) *il est composé, comme le titre l'indique, de deux parties: la premiere est une nouvelle édition augmentée de deux écrits publiés par l'Auteur en 1778. la seconde partie contient quelques uns des principes qu'il a développés dans le nouveau systeme des permutations etc. de plus on y trouve des Tables fondées surces principes.*

Die

gedenkt; in Berlin, wo Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel herausgekommen ist, den doch Herr Fischer wohl auch gelesen haben wird, und worin Herr Bernoulli t) bey Gelegenheit der von Lambert, de la Grange und andern gewünschten Tafeln analytischer Formeln aller Art, auch Herrn Hindenburgs Nov. Syst. Comb. und dessen Tafeln über die Reihen angeführt, mit dem beygefügten Urtheile, Herr Hindenburg habe die Combinationslehre darinnen gründlich abgehandelt und erweitert — diese Schriften also, sammt und sonders, will Herr Fischer gar nicht, oder doch nur erst sehr spät und ohne Nutzen für seine Theorie gesehen, vielleicht nicht einmal gelesen haben? bey seinem Heißhunger, mit welchem er bereits den ersten Unterricht in der Geometrie verschlang, und bey seinem sonst so überwiegenden Hange zu mathematischen Wissenschaften, wovon die Vorrede seines Werks Nachricht giebt; nicht einmal die periodisch herausgekommenen Stücke des Leipziger Magazins? dergleichen, wenn man sie sich auch nicht selbst anschafft, man doch wohl in einer Journalgesellschaft liest, oder sonst einmal durchblättert, sollte es auch aus blosser Neugierde geschehen, um die Autoren mit ihren vielfarbigen Beyträgen, wie die Bilder einer Laterna-magica, vor den Augen vorbey passiren zu lassen!

Und

Die beiden Schriften von 1778. die hier erwähnt werden, sind die in der Note q angeführten, die zusammen nur 71 Quartseiten; da die neue Auflage 151 Quartseiten hat, außer den neu hinzugekommenen 10 combinatorischen Tafeln, von Seite 152 — 180. woraus man auf die Vermehrung schließen kann. Der letzte Theil der vermehrten Ausgabe (was hier seconde partie genennt wird, enthält mehrere ausführlichere Proben der combinatorischen Analytik.

t) In der Vorrede zum ersten Theil. Auch im 5ten Bande S. 157. Note o. sind beide Schriften angeführt und nach ihrem Hauptinhalte angegeben, mit der Bemerkung, daß schon die Factoren der zusammengesetzten Zahlen in ihrer Reihe gut geordnete Complexionen aus Primzahlen darstellen.

Und gesezt auch, Herr Fischer wäre allen diesen Versuchen von aussen, Herrn Hindenburgs combinatorisch-analytische Schriften früher kennen zu lernen, als er es haben und zugeben will, wider alle Wahrscheinlichkeit, glücklich entronnen: so hat er sich dennoch selbst und freywillig in eine Gefahr gestürzt, die ich nicht einsehe, wie er sie hat bestehen können. Herr Fischer behauptet in der Vorrede, die erste Veranlassung zu seinem analytischen Werke und der darin gebrauchten Dimensionszeichen, haben ihm die Untersuchungen über eine allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen gegeben. Er ist also von dem Versuche ausgegangen, für dieses so ungemein wichtige Problem, keine mühsame und beschränkte, sondern vielmehr eine ganz leichte und allgemeine Auflösung zu schaffen. Diese läßt sich aber nicht geben, (wie schon an sich klar, auch von mir bereits im vierten Abschnitte erinnert worden ist) als bis man von der Erhebung der Reihen zu Potenzen von unbestimmten Exponenten, eine eben so leichte als allgemeine Auflösung hat, an welcher es aber, bis dahin, wo Herr Hindenburg solche gefunden und bekannt gemacht hat, überall noch fehlte. Herr Fischer mußte auch sogleich bey seinen Untersuchungen auf diese so erhebliche Schwierigkeit treffen. Nun wird er wohl nicht verlangen, daß man annehmen soll, er habe sie augenblicklich gehoben, als er auf sie gestoßen war; er wird sich vielmehr, sollte man denken, in der Zwischenzeit, wo er sich nicht selbst helfen konnte, um anderer Hülfe oder guten Rath umgesehen haben. Sollte er da nicht sein Anliegen irgend einem Kenner eröffnet, und ihm gezeigt haben, welche Schätze er heben könne, wenn er nur diesen einzigen Stein des Anstoßes, der sie bedecke, aus dem Wege geräumt hätte? — etwa Herrn Prof. B** oder Herrn Prof. M*** oder jedem andern Kenner von Einsicht, zu dem er sonst Zutrauen gehabt hätte. — Diese würden ihn sämmtlich auf Herrn Prof. Hindenburgs Schriften

ten verwiesen haben, die ihm sogleich erwünschte Auskunft geben konnten.

So viele Wahrscheinlichkeiten muß man als unwahrscheinlich ansehen, um den angeblichen unwahrscheinlichen Ursprung der Fischerischen Dimensionszeichen nur einigermaßen wahrscheinlich zu finden!

Den oben angeführten Hindenburgischen Schriften muß ich noch Herrn M. Eschenbachs Abhandlung de Serierum Reversione, formulis analytico-combinatoriis exhibita. Lipsiae 1789. beyfügen. Diese Schrift ist ein wichtiges Aktenstück in Beziehung auf Herrn Fischers allgemeine Auflösungsmethode und deren Formel. Herr Fischer wird mich wohl verstehn, und die Leser werdens auch bald inne werden. Vielleicht hat diese Schrift die Veranlassung zu einer der beiden grossen Revolutionen, durch völlige Umarbeitung des ganzen Manuscript des Fischerschen Werks gegeben, wie aus dessen Vorrede mit mehrern zu ersehen ist.

VII.

Es ist gewiß, daß Herr Fischer Herrn Hindenburgs Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis aus dessen Schriften gekannt und bey seinen Untersuchungen benuzt hat. Anzeige von Herrn Hindenburgs Verdiensten um die Combinationslehre und combinatorische Analytik. Confrontation der Fischerschen Grundzeichen und Formeln mit den Hindenburgischen.

1.

Von der Wahrscheinlichkeit, daß Herr Fischer die von Herrn Hindenburg so viele Jahre vorher erfundene combinatorische

natorische Analytik gekannt und in seinem Werke benuzt habe, bis zur vollen und unumstößlichen Gewißheit, ist nur noch ein Schritt zu thun übrig.

Herr Fischer kommt nicht etwa blos auf dieselben Resultate mit Herrn Hindenburg, sondern er findet sie auch auf demselben Wege, durch dieselben Verfahren, und stellt sie, einige ausserwesentliche Veränderungen (Umprägung der Worte, Umsetzung der Zeichen, Setzung ihrer Werthe statt der Zeichen selbst) ausgenommen, theils in denselben, theils in gleichvielbedeutenden Ausdrücken, in Absicht auf Worte und Zeichen, dar. Herr Fischer bringt, eben so wie Herr Hindenburg, zuerst der vielgliedrigen Ausdrücke Potenzen, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, in Ordnung (§. 44 u. f.), geht von da, auf vielgliedriger Ausdrücke Potenzen, von unbestimmten Exponenten, fort (§. 67. 70. u. f.) und wendet solche Sätze nachher auf mannichfaltige Beyspiele an, zeigt auch in der Folge, (§. 265—275.) wiewohl nur kurz und gleichsam im Vorbeygehen, allgemeine Ausdrücke für Producte und Quotienten aus Reihen, spricht sehr oft (§. 90 u. f.) und sehr vortheilhaft von seiner allgemeinen Auflösungsmethode durch unendliche Reihen, mit Verschweigung der sonst gewöhnlichen Benennung, um die Quelle nicht zu verrathen, aus welcher er sie, theils durch blosse Umtauschung der gegebenen Zeichen in andere, theils durch Umsetzung oder willkührliche Bestimmung ihrer Werthe, geschöpft hat, wobey, wie die Vergleichung deutlich zeigen wird, Herr Fischer mit größter Sorgfalt darauf bedacht gewesen ist, keinen Buchstaben stehen zu lassen, der nicht durch einen andern ausgetauscht, oder willkührlich bestimmt, oder sonst sein Werth dafür gesezt würde [u]). Jedoch

u) Es muß nothwendig auffallen, wenn man bey Vergleichung der Hindenburgischen und Fischerischen Formeln für einerley Resultate gewahr wird, wie sorgfältig Herr Fischer das Zusammentreffen

doch von dieser Aufgabe am Ende des Abschnitts, wenn ich zuvor Herrn Fischers Potenziirung der Reihen näher beleuchtet haben werde.

Herr Fischer hebt nemlich die Schwierigkeiten, die sich, auf dem gewöhnlichen Wege der Substitution, bey Erhebung des Infinitinomiums zu Potenzen, hervorthun, nicht nur eben so, wie Herr Professor Hindenburg, dadurch, daß er die Abhängigkeit der folgenden Glieder von den vorhergehenden aufhebt, und die Glieder sämmtlich einem sehr einfachen, leicht zu übersehenden, und eben so leicht zu entwickelnden Gesetze unterwirft, sondern, er bewirkt alle diese Vortheile auch gerade durch dieselben Mittel, wie jener, durch Einführung und Gebrauch der von ihm sogenannten Dimen-

mentreffen derselben Buchstaben oder Zeichen in beiden (dem Ungefähr kann bey dem Gebrauche so vielerley Buchstaben und Zeichen, als hier oft vorkommen, eine so durchgängige Abweichung gewiß nicht zugeschrieben werden) zu vermeiden gesucht hat. Die Coefficienten z. B. der gegebenen Reihen, die man gebräuchlicher mit kleinen Buchstaben bezeichnet, (weil sie zur Rechnung bequemer sind) zeichnet er gewöhnlich mit grossen lateinischen Buchstaben, die bey Herrn Hindenburg Classenzeichen bedeuten. Für leztere hat Herr Fischer die grossen deutschen Buchstaben (und, um noch mehr abzuweichen, auch römische Zahlen) gewählt, die bey Herrn Hindenburg Binomialcoefficienten bedeuten; für welche Herr Fischer meistentheils kleinere griechische Buchstaben sezt, die Herr Hindenburg gewöhnlich zu Coefficienten braucht. Herr Fischer ist in diesem quid pro quo so weit gegangen, daß er die mit x, y oder z aufgeführten variabeln Grössen nicht selten gegen einander austauscht, einzelne Zeichen in ihre Werthe auflößt, oder unbestimmten Buchstaben bestimmte Werthe giebt, sollte auch die Formel viel dadurch an Kürze und Ausdehnung verlieren. Sehr sichtbar erhellet das, unter mehrern Beyspielen, aus der Uebersetzungsscale der Eschenbachischen Zeichen in Fischerische. Man sehe die hier beygefügte VIII. Tafel, unten.

Dimensionszeichen — blos ein anderes Wort für Combinationszeichen — für die er auch ganz ähnliche Zeichen braucht, und ihre Werthe vollkommen so, wie Herr Hindenburg, entwickelt, die Entwickelung aber blos in Beyspielen zeigt, sich nicht getraut, die Regel dafür, worauf doch eigentlich alles ankommt, und die Herr Hindenburg zuerst gegeben hat, wörtlich auszusprechen und vorzutragen, vielweniger in Herrn Hindenburgs Schriften nachzuweisen, um auf diese Art, wäre es möglich, ganz unentdeckt zu bleiben, oder doch die leidige Ausflucht sich noch vorzubehalten: er habe, da er alles aus und durch sich selbst erfunden, das nicht gewußt! Als ob die ängstliche Sorgfalt, mit welcher Herr Fischer in diesen so wie in andern Fällen, die Quellen zu bedecken sucht, ihn nicht desto sicherer verriethe und blos stellte.

Herrn Fischers Einfall, ein neues Wort zu prägen v), und solches an die Stelle zu setzen, wo Herr Hindenburg bereits ein sehr passendes und bequemeres eingeführt hatte, hat noch mehrere Aenderungen in der Sprache veranlaßt, die Herr Fischer vermuthlich als ein sehr wirksames Vehikel zum Verborgenbleiben angesehen haben mag. Was Herr Hindenburg Bezeichnung der Glieder und Coefficienten der Reihen, Combinationszeichen und Combinationsklassen nennt; das nennt Herr Fischer Markirung der Glieder und Coefficienten vielgliedriger Ausdrücke, Dimensionszeichen und Dimensionsordnungen; wenn Herr Hindenburg von Combinationszeichen der ersten, zweyten, dritten .....nten Classe, von bestimmten und unbestimmten Combinationsklassen,

v) In Nov. Syst. Comb. p. X. und Eschenb. Diss. de Reversione Serierum p. 8. werden Factores unius, duarum, trium dimensionum; septima dimensio; complexiones eiusdem dimensionis erwähnt. Vielleicht haben die Fischerischen Dimensionszeichen von daher ihren Ursprung.

klassen, von Combinationen zu bestimmten Summen spricht; so spricht Herr Fischer von Dimensionszeichen der ersten, zweyten, dritten ....nten Ordnung, von bestimmten und unbestimmten Dimensionsordnungen, von Ordnungen, deren Marken eine bestimmte Summe geben. Das alles geschieht, um die Aufmerksamkeit der Leser von dem eigentlichen Grunde, worauf das ganze Verfahren sich stüzt, von den Combinationen der Glieder und Coefficienten der gegebenen Reihen, abzulenken, und an die Dimensionszeichen und ihre Ordnungen zu heften, und dadurch den Leser stillschweigend zu bereden, die so auffallend leichten Resultate, welche die Fischerischen Formeln geben, seyen blos eine Wirkung der in ihnen vorkommenden Dimensionszeichen und ihrer Ordnungen, als Dimensionszeichen und Ordnungen. Ja es erhellet deutlich, daß, wäre es nur möglich gewesen, Herr Fischer von Combinationen, Amben, Ternen, Quaternen, lieber gar nichts gesagt hätte. Aber das war freylich nicht möglich, weil seine Dimensionszeichen wirkliche Combinationszeichen, der Sache, nur nicht dem Namen nach, sind, die er doch irgend wo herholen mußte, wenn er sich ihrer bedienen wollte. Herr Fischer geht daher bey den Vorbereitungssätzen im ersten Abschnitte, S. 3 — 7, die doch den eigentlichen ersten Grund enthalten sollten, sehr geschwind über diesen ihm gefährlichen Gegenstand hinweg. Er eröffnet, um sich so gut er kann aus der Verlegenheit zu ziehen, den Combinationsquell plötzlich, verstopft ihn aber auch wieder eben so plötzlich, um sich nicht zu sehr zu verrathen, und um seine Dimensionszeichen mit ihren Ordnungen im zweyten Abschnitte (von S. 7 — 26.) vorzulegen, hinter denen er sich sicher zu verbergen glaubt, obgleich eben diese Zeichen ihn am meisten verrathen und als unwiderlegbare Zeugen wider ihn bald auftreten werden.

Mit allem Bedacht sagte ich eben jezt: „um sich nicht zu sehr zu verrathen;“ denn, etwas mußte er sich doch hier

blos geben; doch weniger als nöthig war, wenn er sich nicht aus Unvorsichtigkeit hiebey übereilt hätte. Herrn Fischers Darstellung (§. 7.) der Quaternen von A+B+C, als Glieder der vierten Potenz dieses Trinomiums, ist, der ganzen Stellung und Anordnung nach, durchaus die Hindenburgische combinatorische, (Infin. Dign. p. 18. wenn man die dortigen, den Buchstaben d enthaltenden, unter einander stehenden Glieder, durch einen Verticalstrich von den übrigen vorherstehenden, nur allein hieher gehörigen Gliedern, absondert) bis auf die Versetzungszahlen, von welchen dort die Rede nicht war. Eine solche ganz eigene figürliche Stellung und Anordnung der Glieder neben und unter einander, die von der (§. 5.) von Herrn Fischern gebrauchten ganz abweicht, und von welcher Herr Fischer weiter keinen Vortheil zieht, wie Herr Hindenburg gethan, der solche sehr absichtlich gewählt hatte, um mancherley combinatorische Erscheinungen, in Absicht auf Anfangs- und Endbuchstaben, horizontale und verticale Glieder, Formirung der Classen durch einander und unabhängig, Zahl der Glieder nach ihren verschiedenen Verbindungen, aus Binionen a+b, oder Trinomien a+b+c, oder Quadrinomien a+b+c+d; u. s. w. — Eine solche ganz eigene figürliche gekünstelte Stellung, auf welche weiter von Herrn Fischer gar nichts gebaut, die vielmehr in ihren Folgen ganz verkannt wird, kann doch nicht das Ungefähr herbeygeführt haben! Herr Fischer hat also vermuthlich die Quaternen, um sich nicht dabey zu versehen, von der Hindenburgischen Darstellung abgeschrieben, oder nach dessen Anleitung für sich entwickelt, und ihnen nachher die Versetzungszahlen beygefügt, die verrätherische Anordnung aber hinterdrein wieder zu zerstören, vergessen. Wenn also Herr Fischer (§. 9.) sagt: „Mehrere (und ausführlichere) Beyspiele hin„zuzusetzen, halte ich für unnöthig;“ so hätte er vielmehr sagen sollen: für gefährlich; denn Herr Fischer will schlech-

terdings

terdings nicht das Ansehen haben, als ob er das bereits im Jahr 1779 von Herrn Hindenburg herausgegebene Werk: Infinitinomii Dignitates etc. worinnen so viele Anwendungen der Combinationslehre auf die Analysis vorkommen, gekannt und benutzt hätte. Wenn Herr Fischer aber in demselben 9ten §. weiter noch hinzusezt: mehrere Beyspiele beyzufügen sey darum unnöthig, weil die beygebrachten mehr zur Versinnlichung seines Lehrsatzes über die Potenzen, als zum Rechnungsgebrauche dienen sollten, eine weit leichtere Methode, dergleichen Potenzen zu formiren, komme im dritten Abschnitte (§. 47 — 49.) vor; wenn ferner Herr Fischer in diesem dritten Abschnitte, (§. 50.) wo er nun die Formirung der dritten Potenz desselben Trinomiums A+B+C, nach der angeblich leichtern Methode, Beyspielsweise, nachweiset, und am Ende hinzusezt: „Bey höhern Potenzen, oder sehr vielgliedrigen Wurzeln, würde die Uebersetzung (seiner Zeichen) weitläuftiger und verwickelter, wovon aber der Grund in der Natur der Sache liege, und durch keine Methode gehoben werden könne;" gleichwohl aber hierbey alle Uebersetzung fremder, zur Sache nicht nothwendig gehöriger Zeichen, nur allein durch die Hindenburgische, von Herrn Fischer §. 7. gebrauchte, aber §. 9. wieder verworfene, combinatorische Darstellung vermieden werden kann, die nicht mehr Zeit erfordert, als man zum Schreiben der dafür nöthigen Buchstaben braucht: so erhellet daraus um so mehr, daß die so künstliche und figürliche Darstellung (§. 7.), die Herrn Fischer, und durch ihn seine Leser, zu nichts führt, unmöglich Herrn Fischers eigenes Werk seyn könne.

Herr Fischer geht, so viel ihm möglich, bey seinem grossen Unternehmen, sich überall als Selbsterfinder zu geriren, sehr behutsam zu Werke. Er spricht immer von vielgliedrigen, endlichen und unendlichen Ausdrücken und Reihen, und solcher Reihen Potenzen, läßt in dem ganzen

Werke den Ausdruck Infinitinomium, oder Dignitäten derselben, nicht ein einzigesmahl fallen, um nicht an die Hindenburgische Schrift: Infinitinomii Dignitates etc. zu erinnern. Er spricht von einer allgemeinen Auflösungsmethode durch Reihen, und bemerkt (§. 99.), um eine möglichst vollständige Anwendung der, auf seine Dimensionszeichen gegründeten, Theorie zu machen, fehle noch dieses Problem, welches vielleicht das wichtigste in seinem Werke, und gewissermaßen in der ganzen Analysis heissen könne. Ein so wichtiger Aufschluß war also, wie es scheinen könnte, Herrn Prof. Fischer aufbehalten, wenigstens in so weit, als die von ihm hiebey gebrauchten Zeichen den Auflösungsformeln eine ungewöhnliche Geschmeidigkeit in der Anwendung geben. Leser aber, die mit der combinatorischen Analytik bekannt sind, finden auf der Stelle, daß die Fischerische allgemeine Auflösungsformel nichts mehr als die travestirte Eschenbachische, in Combinationszeichen ausgedrückte, Umkehrungsformel sey, die Herr Fischer, ohne allen Beweis, ganz treuherzig vorgetragen hat — weil Eschenbach, gleichsam als ob ihm so was geahndet hätte! muthwilligerweise keinen Beweis davon gegeben hatte.

Dergleichen Umformungen und Uebersetzungen von Begriffen, Zeichen und Formeln, erscheinen in dem Fischerischen Werke so häufig; keine aber häufiger, als die auf allen Seiten vorkommenden, für neu ausgegebenen, und mehr als die Hindenburgischen Combinationszeichen wirksam seyn sollenden sogenannten Dimensionszeichen; diese Götzen, auf die Herr Fischer alle sein Vertrauen sezt, die ihn aber so wenig schützen können, als jene geschnizten Bilder; diese Miethlinge, die gleich fremden, nicht einheimischen Söldnern, ihn und seinen Dienst sogleich verlassen müssen, wenn sie von ihrem rechtmässigen Herrn, dem sie als Eigenthum zugehören, abgerufen werden.

2.

Herrn Hindenburgs Verdienst um die Combinationslehre und combinatorische Analytik.

Wie ganz ohne Grund und höchst ungerecht Herrn Fischers Behauptungen und Anmaßungen in Beziehung auf diese Zeichen und ihre Wirkung gegen die Hindenburgischen sind; dies klar und deutlich darzuthun, ist es nöthig, Herrn Hindenburgs Verdienste um die Combinationslehre und deren Anwendung auf die Analysis, etwas genauer anzugeben. Ich kann mich hier auf das berufen, was Herr Hindenburg bey einer andern Gelegenheit selbst hierüber gesagt hat, und werde zum Theil seine eigenen Worte anführen und gebrauchen w).

Sollte die Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis dergestalt möglich gemacht werden, daß dem Verfahren dafür zugleich die größte Leichtigkeit und Geschmeidigkeit gegeben würde: so mußten die Vorschriften der Combinationslehre, wie solche Leibnitz und Jacob Bernoulli x) gegeben hatten, nicht nur erweitert, sondern auch auf einen ganz andern Fuß gestellt; die algebraischen, nur etwas verwickelten Operationen aber, und so auch die transcendentischen, in gleichgültige, leichtere, combinatorische verwandelt und umgesezt werden y).

Alle

w) In der Abhandlung über die cyklischen Perioden. Leipz. Magaz. der Math. 3tes St. 1786. S. 281 — 324.

x) Leibnitii Dissertatio de Arte Combinatoria. Lipsiae 1766. und in Leibn. Opp. T. II. p. 339. seq. Ferner: Stochastice s. Ars coniectandi; Opus posthumum (Iac. Bernoulli.) Basil. 1713.

y) Dahin gehören die Formeln und Tafeln für die Multiplication und Division der Reihen, Nov. Syst. Comb. Tab. I. und

Alle combinatorische Aufgaben gehören zu einem der drey grossen Abschnitte oder Capitel, von Permutationen, Combinationen und Variationen; deren Darstellung für gegebene Dinge Herr Hindenburg sehr schicklich durch combinatorische Operationen darstellt. Man hat nemlich nach Herrn Hindenburg combinatorische Operationen, wie man arithmetische, algebraische, transcendentische Operationen hat. Auch sind die combinatorischen Operationen nicht nur einfacher als die arithmetischen, sondern jene auch vor diesen prioritätisch, d. i. die combinatorischen sind eher im Verstande als die arithmetischen, die blos bedingte combinatorische sind, wo nur angegeben wird, wie sich die mit einander verbundenen oder zu verbindenden Dinge auf einander beziehen, auf und in einander wirken sollen. Bey dieser Behauptung ist nichts weiter Befremdendes oder Auffallendes, als daß man nicht eher daran gedacht hat; denn selbst die erste und einfachste Aufgabe in der Arithmetik, die allen arithmetischen Operationen noch vorausgeht: das Schreiben der Zahlen, nach der Ordnung, aus den gegebenen Grundzeichen 0, 1, 2, 3 ..... ist eine combinatorische, deren Regel in der Hindenburgischen Combinationslehre nachgewiesen wird, und die auch Herr Hindenburg als ein sehr belehrendes Beyspiel für diese Wissenschaft aufgestellt hat [z]).

Es

und II. S. LXXI — LXXXIII. die Formeln für die Erhöhung auf Potenzen und Ausziehung der Wurzeln, Seite LIV. mit Tab. II. III. S. LVIII. LIX: die Formeln für die Umkehrung der Reihen, S. XXIX — XXXI. ingleichen Eschenb. de Ser. Reverſ. p. 23 — 25. und p. 30. 31. Die Summe von Producten, Nov. Syſt. S. LXXVI. g. und von Potenzen, aus mehrern Reihen, Infin. Dign. S. 101. welche leztere den Method. Potentiarum enthält, und wegen ihres sehr ausgebreiteten Nutzens vor andern wichtig ist; und dergleichen mehr.

z) Nov. Syſt. Combin. p. XVI. und die dortigen Noten p. q. r. s.

Es liegt zwar die Uebereinstimmung combinatorischer Verfahren, mit denen, welche die Arithmetik oder Analysis vorschreibt, in manchen Fällen so unverkennbar vor Augen, daß man nicht leicht darüber wegsehen kann, sondern selbige mit einiger Aufmerksamkeit nothwendig wahrnehmen und bemerken muß. Daraus folgt aber bey diesem Gegenstande nicht mehr, als was die Erfahrung bey andern längst bewährt hat: man kann viel an einer Sache, selbst das Hauptmoment in gewisser Rücksicht, bemerken, und die nähere Anwendung davon, zu Hebung aller noch vorwaltenden Schwierigkeiten, bleibt dennoch aufgeschoben. Es scheint, als ob manche Dinge erst durch die Zeit reifen müßten, andere nur auf eine bequeme Veranlassung warteten, andere zwar bemerkt, aber wegen ihrer natürlichen Simplicität, so gut als nicht bemerkt, übersehen würden. Ita fit plerumque (sagt Herr Prof. Hindenburg in Nov. Syst. Comb. p. XVII.) quae sunt ante oculos non videmus, facilia negligimus, venamur difficilia; eine grosse Wahrheit! So hat Jacob Bernoulli die Sympathie, wie er sich ausdrückt, zwischen Combinationen gegebener Dinge, und den Potenzen der Summe dieser Dinge, wahrgenommen [aa]), auch die Idendität der figurirten Zahlen mit den so genannten Unzen der Potenzglieder des Binomiums, was man schon vorher wußte, erkannt, und diese Zahlen daraus hergeleitet. Nichts konnte wichtiger seyn, als diese Bemerkung; und dennoch hat sie Bernoulli, in Absicht auf Anwendung der Combinationslehre

aa) Ars conject. p. 131. 132. cf. p. 93 — 95. Aus dieser Bemerkung folgert Bernoulli nichts weiter, als daß man daraus so wohl die Anzahl der Glieder für jede Potenz, als auch jedes gegebenen Gliedes Coefficienten leicht übersehen könnte. An die wirkliche Darstellung dieser Glieder auf diesem Wege hat er nicht gedacht, so natürlich und leicht auch die Veranlassung dazu war.

tionslehre auf die Analysis, ungenuzt liegen lassen und ganz übergangen; Jacob Bernoulli, dem doch als Verfasser eines Systems der Combinationslehre alles wichtig seyn mußte, was zu deren Vervollkommung und Erweiterung etwas beytragen konnte. Abraham de Moivre, der Verfasser der oben angeführten Doctrine of Chances, ist schon weiter gegangen, und hat in seinen Auflösungen der beiden lange vor Ausgabe dieses Werks herausgegebenen wichtigen Problemen, über die Potenzen des Infinitinomii, und über die Umkehrung der Reihen [bb]), wirklich Nutzen von der Combinationslehre gezogen. Das von ihm angegebene Verfahren bey der ersten Aufgabe, das auch Herr Hindenburg excerpirt hat [cc]), ist wirklich combinatorisch, und für die Auflösung der zweyten Aufgabe hat de Moivre, zu Darstellung und Fortsetzung der gegebenen Coefficienten, sogar eine combinatorische Regel in aller Form gegeben [dd]), die aber freylich wieder einer anderen Regel bedarf, durch welche das in der ersten geforderte Verfahren in Ausübung gebracht werden

bb) A Method of Raising an infinite Multinomial to any given Power, or Extracting any given Root of the same. Phil. Transf. Vol. XIX, No. 230. p. 619. und A Method of Extracting the Root of an Infinite Equation. H. Vol. XX. p. 190.

cc) Infinit. Dign. p. 44 — 46.

dd) Combine the Capital Lettres (d. i. die von ihm angenommenen Coefficienten, deren Werth bestimmt werden soll) as often, as you can make the Sum of their Exponents equal to the Index of the Power to which they belong. Vermuthlich hat Herr Fischer seine Regel nach dieser geformt. Daß aber, und warum sie keinesweges hinreichend sey, daß sie blos das Was? ausdrückt; (das Jedermann gleich übersieht) nicht aber das Wie? angiebt, das hier eigentlich die Schwierigkeit ausmacht, hätte Herr Fischer aus Herrn Eschenbachs Abhandlung (Serier. Reverf. p. 7. 8.) lernen können, die er doch so fleissig studirt und benutzt hat.

den muß, dergleichen de Moivre aber nicht gegeben hat. Eben so verhält es sich mit der Auflösung, die Leibnitz nachher von der Umkehrung der Reihen gegeben hat **), wo er das Verfahren dafür, auch in einer combinatorischen Regel ausgedrückt hat, die aber so schwierig und dunkel ist, daß selbst de Moivre bekannte, sie zu verstehen und zu befolgen, müsse man schon nicht gemeine Kenntnisse von der Combinationslehre mitbringen. Dies Urtheil hat sich durch den Erfolg vollkommen bestätigt. Denn, Johann Bernoulli, ob er schon des Moivre's combinatorisches Verfahren bey den Potenzen der unendlichen Reihen vor sich hatte, auch desselben, so wie Leibnitzens combinatorische Regel für die Umkehrung der Reihen, genau kannte, um so mehr, da Leibnitz noch vor dem Abdrucke seines Aufsatzes selbigen seinem Freunde zugeschickt, und ihm seine neue Bezeichnung und combinatorische Entwickelung nachdrücklich empfohlen hatte, so war das alles doch nicht hinlänglich, diesen grossen Mann von der Nützlichkeit und Brauchbarkeit combinatorischer Zeichen und Regeln in der Analysis zu überzeugen; er sahe vielmehr das alles für eine bloße, viel zu abstracte Speculation an, ohne allen practischen Nutzen, wie ihm ähnliche, von ihm selbst angestellte Versuche bereits gelehrt hätten ††). Und so konnte gleichwohl Leibnitz, der den so weit über die ganze Analysis sich erstreckenden Einfluß und Nutzen der Combinationslehre vollkommen durchgesehen hatte, blos aus Man-

**) Nova Artis analyticae promotio, specimine indicata, dum Designatione per Numeros assumtitios Loco Literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit. Act. Erud. ann. 1700. Mens. Mai. p. 106. et Opp. Leibn. T. III. No. LXI. p. 359. seq. Diese Leibnitzische Umkehrungsaufgabe hat auch Herr Hindenburg excerpirt: Inf. Dign. Praef. p. XV — XVIII.

††) Leibnitzens und Bernoulli's hieher gehörige Stellen. Nov. Syst. Comb. p. XVI. not. q.

Mangel bequemer Zeichen und ihres zweckmässigen Gebrauchs, den so überwiegenden Vortheil der Sache andern nicht gehörig deutlich und begreiflich machen. Selbst Euler, der doch de Moivre's, Leibnitzens und Bernoulli's Schriften fleissig gelesen, und die Erfindungen dieser und anderer Vorgänger ansehnlich erweitert und bereichert hat, zeigt gleichwohl nicht die geringste Spur, daß er den Nutzen einer combinatorischen Analytik, auch nur von weiten, geahndet hätte. Hier ist vielleicht der Fall, kann man denken, wo die Sache nur einer nähern Veranlassung bedarf, um entdeckt zu werden. Diese hatte Euler gleichwohl, bey seinen Untersuchungen de partitione Numerorum, die er zuerst in seiner Introductione ad Analysin Infinitorum T. I. C. XVI. vorgetragen, und nachher in den Nov. Commentariis Academ. Petrop. T. III. ad ann. 1750. 1751. vermehrt und verbessert, wiederholt hat, wenn er bey diesen Untersuchungen über die Zahl und Menge dieser Zerfällungen auch nachgedacht hätte, wo etwa die Auflösung dieser Aufgabe ihren Nutzen haben könnte. Das würde ihn zu näherer Betrachtung der Zerfällungen selbst geleitet haben, und diese dann ihren unmittelbaren Nutzen in der Analysis, vielleicht an sich, ganz gewiß aber bey der Rückerinnerung an das, was Leibnitz verschiedentlich über dergleichen Discerptionen geäusſert, ihn verrathen haben.

Herrn Eulers Abhandlung de partitione numerorum ist ganz combinatorisch; es wird darin die Frage beantwortet, auf wie viel verschiedene Arten eine gegebene ganze Zahl n, aus gegebenen Zahlen 1, 2, 3, 4..... sich nach zwey, drey, vier, und mehrere dieser Zahlen, als aus Theilen, zusammensetzen lasse. Herrn Hindenburgs Auflösung des mehrmals erwähnten Discerptionsproblems enthält Vorschriften, diese Zusammensetzungen selbst, nach ihren verschiedenen Arten, darzustellen, und ist folglich eine Ergänzung der Eulerischen Abhandlung, die nur allein die Anzahl

der

der möglichen Gestalten bestimmt. Hätte Herr Euler zuvor diese Aufgabe berichtiget, und dabey das Gesetz gut geordneter Complexionen zum Grunde gelegt: so würde die Analysis seiner Aufgabe viel einfacher und kürzer ausgefallen seyn, weil sich die verschiedenen Relationen der Eulerischen Formeln gegen einander unmittelbar aus den Hindenburgischen Vorschriften der Darstellung der einzelnen Formen, und der damit zusammenhängenden so leichten Umwandlung der einen in die andern, ergeben.

Die hier beygebrachte Bemerkung über die Eulerische Aufgabe zeigt zugleich die Ursache, warum die Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis so lange aufgeschoben geblieben ist. Man hatte nemlich bisher, wie bey dieser Aufgabe, so überhaupt, in der Combinationslehre, (selbst durch die häufige und fast einzige, aber sehr ausgebreitete und in viele Fächer einschlagende Anwendung derselben, auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dazu veranlaßt) fast nur allein um die Menge und Anzahl der Verbindungen und Versetzungen gegebener Dinge sich bekümmert, ihre wirkliche Darstellung aber, die für die Analysis so wichtig ist, fast ganz übergangen, oder nur jener Zahlen wegen in Betrachtung gezogen. Hier war also noch viel zu thun übrig; und es ist in der That unbegreiflich, wie ein so grosses fruchtbares Land so lange unbebaut hat liegen bleiben können.

Herr Hindenburg, der bey seiner Bemühung, eine leichte und geschmeidige Formel für die Potenzen unendlicher Reihen zu schaffen, zufälligerweise dahin geleitet wurde, diese Lücke zu bemerken, hat ihre Ausfüllung und Ergänzung auf folgende Art glücklich zu Stande gebracht.

Da die combinatorischen Aufgaben, nach den verschiedenen dabey zum Grunde liegenden Bedingungen, sehr verschieden sind: so suchte Herr Hindenburg zuerst diejenigen auszuheben, die vor andern häufig vorkommen, und den wichtigsten

sten Einfluß auf die Analysis haben. An dieser Stelle hier können und dürfen, um nicht zu weitläuftig zu werden, nur diejenigen erwähnt werden, die man, wegen der Vergleichung der Fischerischen Zeichen und Formeln mit den Hindenburgischen, nothwendig kennen muß: die Combinationen und Variationen gegebener Dinge mit ihren Zeichen, wo Wiederholungen verstattet sind, beide, sowohl an sich, (simpliciter) als nach bestimmten Summen; (Sectiones numeri praepositi) vier combinatorische Aufgaben gg) von einem sehr ausgedehnten Umfange, bey denen, so wie bey andern, hier nicht erwähnten, um die Regeln ihrer Auflösung, so leicht in ihren Vorschriften, und bequem in ihrer Anwendung, die daraus zusammenzusetzenden combinatorisch-analytischen Formeln aber so einfach und vielumfassend, als nur immer möglich ist, zu machen, folgendes im Allgemeinen und einmal für allemal von Herrn Hindenburg festgesezt und angenommen worden ist:

1) Die

gg) Nach der Hindenburgischen Combinationslehre und in seinen Ausdrücken sind es folgende: Rerum datarum, admissis repetitionibus, quaerere 1) Combinationes et 2) Variationes, numeri dati sine propositi utrasque, 3) Combinationes et 4) Variationes, simpliciter utrasque. Eigentlich hat Herr Fischer blos die erste combinatorische Aufgabe benuzt und auf häufige Beyspiele angewendet; von der zweyten hat er (im 8ten Abschnitte des 2ten Theils seines Werks, von §. 265 — 275.) so gut wie Nichts gesagt, selbige auch nur auf zwey Beyspiele angewendet. Der dritten und vierten Aufgabe hat er gar nicht Erwähnung gethan; sie vielmehr ganz verkannt. Sie werden hier nur erwähnt, weil Herr Fischer grossen Nutzen davon hätte ziehen können. Anderer Combinationsaufgaben, deren Anwendung auf die Analysis von Herrn Hindenburg gezeigt worden ist, und leicht weiter erstreckt werden können, will ich hier gar nicht gedenken, weil die Fischerischen Untersuchungen nicht darauf führen.

1) Die gegebenen Dinge werden, wie sonst schon gebräuchlich, nach der Folge

der Buchstaben a, b, c, d, e, f....
oder der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6....

dargestellt. Das leztere geschieht nach Leibnitzens Beyspiele, und ist in gewissen Rücksichten sehr vortheilhaft, dennoch aber, bey Combinationen und Variationen, die sich nicht auf bestimmte Zahlen oder Summen beziehn, nicht schlechterdings nothwendig. Buchstaben und Zahlen, wie hier steht, mit einander verbunden, werden immer als Zeiger (index) zu den Formeln gesezt, in denen combinatorische Zeichen vorkommen, um nachzuweisen, worauf die Zahl dieser Zeichen sich beziehn. Nicht selten ist der Zeiger

$$\binom{b,\ c,\ d,\ e,\ f....}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5....}$$

oder anders.

2) Die einzelnen Species oder Formen von Combinationen oder Variationen gegebener Dinge, werden mit einem gemeinschaftlichen Namen Complexionen genannt: Complexiones schlechthin (simpliciter) und zu bestimmten Zahlen oder Summen (numeri dati s. propositi.)

3) Gutgeordnete Complexionen (rite ordinatae) sind, in denen Buchstaben oder Zahlen, so auf einander folgen, daß nie ein früherer Buchstabe auf einen spätern, eine kleinere Zahl auf eine grössere folgt. Sie sind die Repräsentanten und Stellvertreter aller übrigen Complexionen, die mit ihnen einerley und gleichviel Buchstaben oder Zahlen haben. Dergleichen können nur durchaus bey Combinationen vorkommen, nicht aber bey Variationen, bey denen man alle mögliche Verbindungen zugleich mit allen möglichen Versetzungen der gegebenen Dinge verlangt.

4) Diese Complexionen werden nach Classen geordnet. Die erste Classe machen die gegebenen Dinge selbst, als Unionen, aus; zur zweyten Classe werden die zweybuchstäbigen

oder zweyzahligen Complexionen, als Binionen, zur dritten die dreybuchstäbigen oder dreyzahligen Complexionen, als Ternionen; und so weiter, die vier-, fünf-, sechs-, u. s. w. buchstäbigen oder zahligen Complexionen, für die folgenden Classen nach der Ordnung, gerechnet.

5) Alle Classen müssen gut geordnet seyn, (rite ordinatae) das heißt, ihre Complexionen (wenn man die darinne vorkommenden Zahlen, als Grundzeichen oder bloße Ziffern, und so die ganze Complexion als eine aus diesen Ziffern bestehende Zahl ansieht) müssen so auf einander folgen, wie Zahlen wachsen; es muß nie eine kleinere Complexion, als Zahl, auf eine grössere folgen. Bey den Combinationen müssen also beide, sowohl die Complexionen als die Classen, gut geordnet seyn; bey den Variationen kann das nur bey den Classen statt finden, und die Folge ihrer Complexionen dadurch bestimmt werden.

6) Oft ist es bey Combinationen nöthig, zu wissen, wie viel verschiedene Complexionen derselben, nur aber versezten Buchstaben oder Zahlen, es giebt, wie sie eine gutgeordnete Complexion, als Stellvertreterin aller übrigen, enthält. Das zeigt die Versetzungszahl (numerus permutationum) oder der Polynomialcoefficient an; welche Zahl man also auf den Fall der Complexion vorsetzen muß.

7) Bey wirklicher Darstellung der einzelnen Complexionen für die Classen bedient sich Herr Hindenburg nicht selten einer figürlichen Anordnung und Stellung solcher Complexionen neben und unter einander, in so fern sich daraus oft sehr wichtige nützliche Folgerungen ziehen und allgemeine Sätze herleiten lassen, auch das Gesetz der Fortsetzung für mehrere Dinge und folgende Classen, sowohl dependent von vorhergehenden, als auch independent und absolut, nicht selten zu leichterer Uebersicht anschaulich dargelegt werden kann. Beyspiele dafür sind, bey Combinationen an sich, (Infinit. Dign. p. 17. 18. seq. und 159.) so wie für

bestimmte

bestimmte Zahlen oder Summen (Ebendas. S. 74. 75. seq. mit den Bemerkungen S. 78 — 83. von No. 4 — 6. ingleichen die Tafel S. 166. und Nov. Syst. Comb. p. LVIII.) für Variationen an sich, (Nov. Syst. Comb. p. LXI.) und zu bestimmten Summen, (Inf. Dign. p. 131. nebst den Abschnitten 7. 8. p. 133. 134. ingleichen die Tafeln p. 172. 177 — 180.) und mehr dergleichen.

Wegen der am häufigsten vorkommenden, hieher gehörigen Zeichen ist noch zu bemerken:

8) Die Zeichen für die Classen nach der Ordnung, sind für die Combinationen an sich: $'A$, $'B$, $'C$, $'D$, $'E$..... für die Variationen $'\mathit{A}$, $'\mathit{B}$, $'C$, $'\mathit{D}$, $'\mathit{E}$..... für Classen zu bestimmten Zahlen n, m, oder Summen ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C, ^{n}D..... und $^{m}\overset{p}{\mathit{A}}$, $^{m}\overset{qp}{\mathit{B}}$, $^{m}\overset{rqp}{C}$, $^{m}\overset{srqp}{\mathit{D}}$..... Zahlen, neben den Classenbuchstaben, rechter Hand, zeigen einzelne Complexionen der Classen nach ihrer Ordnung an: $'A3$; $'B5$; $'Cr$..... $^{n}D10$; $^{n}E15$; ^{n}Hm..... und so auch bey den Variationsclassen.

9) Die einzelnen Complexionen der Classen, mit ihren Versetzungszahlen, oder Polynomialcoefficienten, anzudeuten, werden den grossen lateinischen Classenbuchstaben die kleinen gleichnamigen deutschen Buchstaben vorgesezt: $\mathfrak{a}'A$, $\mathfrak{b}'B$, $\mathfrak{c}'C$, $\mathfrak{d}'D$...., oder $\mathfrak{a}^{n}A$, $\mathfrak{b}^{n}B$, $\mathfrak{c}^{n}C$, $\mathfrak{d}^{n}D$....

10) Für die Binomialcoefficienten nach der Ordnung dienen die grossen deutschen Buchstaben mit Beyfügung des Exponenten: $^{m}\mathfrak{A}$, $^{m}\mathfrak{B}$, $^{m}\mathfrak{C}$, $^{m}\mathfrak{D}$.... Oft kommen die Zeichen in 8, 9, 10. zusammen: $^{m}\mathfrak{A}\mathfrak{a}'A + {}^{m}\mathfrak{B}\mathfrak{b}'B + {}^{m}\mathfrak{C}\mathfrak{c}'C$.... oder $^{m}\mathfrak{A}\mathfrak{a}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}\mathfrak{b}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}\mathfrak{c}^{n}C$.... deren Werthe durch die beygefügten Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots \end{pmatrix}$ nach erwiesenen Regeln und construirten Tafeln sogleich entwikkelt und dargestellt, auch in Localausdrücke p^{m}/n.... qp/m (d urch welche man statt der Glieder selbst nur ihre

Stellen angiebt) und umgekehrt verwandelt werden können. Von solchen Localausdrücken und ihren Werthen (Nov. Syst. Comb. p. LI. LIII.) Eine der ersten uud wichtigsten Localformeln ist die p. LIII. vorkommende: ${}^{m}\mathfrak{A}p^{1}\rceil n + {}^{m}\mathfrak{B}p^{2}\rceil (n-1) + {}^{m}\mathfrak{C}p^{3}\rceil (n-2) +$ rc. Endlich

11) Die Distanzexponenten, die als Zahlen über die Buchstaben geschrieben werden, dienen dazu, um durch ihre Beyhülfe gleichnamige Zeichen, wie sie 8. 9. 10. vorkommen, durch einander auszudrücken, vorhergehende durch folgende und umgekehrt, bestimmte durch unbestimmte und wechselsweise.

Diese Einrichtung, in Absicht auf Anordnung und Stellung, Zeichnung und Entwickelung, durch Beyspiele hier zu belegen und in ihrer Wirkung darzustellen, würde viel zu weitläuftig seyn, und ich muß daher blos auf die hier und Tafel I. angeführten Stellen verweisen. Daraus wird sich denn folgendes Resultat sehr leicht ergeben:

Alles wird hier wie Zahlen behandelt, die Ganzen werden ans den gegebenen Dingen als Theilen, wie die Zahlen aus den einzelnen Ziffern als Elementen, zusammengesezt, auch eben so verändert; und da hier mehrere zusammen gehörige, aber, den Theilen selbst, oder auch nur ihrer Anordnung nach, verschiedene Complexionen, unter sich wie Zahlen fortgehen, und sich dadurch die einzelnen Complexionen gut zu ordnender Classen, in ihrer natürlichsten Folge hintereinander, auf die deutlichste und sicherste Art ergeben: so erleichtert das nicht nur die wirkliche Darstellung (auf die es hier hauptsächlich ankommt) der zu verbindenden Dinge, ungemein, indem es die Regeln abkürzt und einfacher macht, die man nun prompter und mit weniger Gefahr zu irren befolgen kann, sondern die analytischen Formeln, die sich auf solche Darstellungen beziehn, erscheinen hier in den einfachsten

fachsten Gestalten, auf die regelmäßigste Art ausgedrückt. Durch so ein Verfahren wird es möglich, allgemeine Glieder zu schaffen, die oft kein anderes als das combinatorische geben kann, die verwickeltsten und verworrensten Formeln anderer Methoden zu simplificiren, und so ihre Entwicklung ohne Vergleich leichter zu machen, als jener, wo man sich oft anhaltend verdrüßlichen Substitutionen ausgesezt findet, bey denen man das Ende nicht absehen kann. Auch wird diese Entwickelung noch dadurch ungemein erleichtert, und bequem gemacht, daß diese Einrichtung verstattet, die Werthe der Combinationselemente der Formeln im Voraus in Tafeln anzuordnen, deren man sich in der Anwendung mit Vortheil bedienen kann.

Noch ist wegen der oben erwähnten figürlichen Anordnung und Stellung zu bemerken, daß grössere Ganze aus kleinern, durch blosse Anfügung des Ermangelnden, kleinere Ganze aus grössern, durch blosse Absonderung des Ueberflüssigen, sich leicht und bequem durch und aus einander darstellen lassen. Die Vortheile solcher combinatorischer Darstellungen, Involutionen und Evolutionen sind um so mehr erheblich, da auf ihnen zum Theil, auch bey der größten Verwickelung, die so promten Resultate beruhen, welche die combinatorisch-analytischen Formeln gewähren, und man übersieht ohne Schwierigkeit, daß diese großen Vorzüge, der Combinationsmethode vor andern ganz wesentlich eigen sind, und nothwendig seyn müssen.

VIII.

Fortsetzung. Die Fischerischen Dimensionszeichen und die daraus bestehenden Formeln sind nichts anders als absichtlich verstellte Hindenburgische Combinationszeichen und Formeln. Die von Herrn Fischer getroffene Abänderung ist noch dazu fehlerhaft und hebt zwey wesentliche Vorzüge der Hindenburgischen Bezeichnung, Simplicität und Harmonie, ganz auf.

Die Dimensionszeichen, die Herr Fischer im zweyten Abschnitte des ersten und im achten des zweyten Theils seines Werks ausführlich erklärt, und ihren Gebrauch in den übrigen Abschnitten auf sehr viele Beyspiele angewendet hat, kommen mit den Hindenburgischen, im vorigen Abschnitte No. 8 und 9 vorgetragenen: a^nA, b^nB, c^nC.... wenn von Potenzen, und $^{m}\overset{p}{A}$, $^{m}\overset{qp}{B}$, $^{m}\overset{rqp}{C}$.... wenn von Producten die Rede ist, vollkommen überein. Sie haben, wie sogleich gezeigt werden soll, ihr Daseyn lediglich den Hindenburgischen Zeichen zu verdanken, oder sind vielmehr Hindenburgische, nur absichtlich verstellte, Combinationszeichen. Die Gewißheit dieser Behauptung unumstößlich darzuthun, ist es nöthig, die Zerfällungen der Zahlen, nach den beiden Hindenburgischen Hauptproblemen dafür, in ein paar Beyspielen aufzustellen, mit Beyfügung der Hindenburgischen und Fischerischen Zeichen, so wie ihre Werthe in Buchstaben, zu beiden Seiten. Ich will zuerst von den Dimensionszeichen der ersten Art sprechen, wovon auch Herr Fischer sehr ausgebreitete Anwendung in seinem Werke gemacht hat; von den

den Dimensionszeichen der andern Art, die Herr Fischer, so wie ihren Gebrauch, nur mit wenigen berührt hat, hernach.

I) Combinatorische Zerfällungen der Zahl 7. nach gutgeordneten Zahlencomplexionen und Classen, mit Beyfügung der zugehörigen Buchstabenwerthe und Versetzungszahlen für den Index oder Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

Nach Hindenburg		Nach Fischer
$a^7A = g$	7	$g = \overset{7}{A}$
$b^7B = 2af$	1,6	$2af = \overset{7}{B}$
$2be$	2,5	$2be$
$2cd$	3,4	$2cd$
$c^7C = 3a^2e$	1,1,5	$3a^2e = \overset{7}{C}$
$6abd$	1,2,4	$6abd$
$3ac^2$	1,3,3	$3ac^2$
$3b^2c$	2,2,3	$3b^2c$
$d^7D = 4a^3d$	1,1,1,4	$4a^3d = \overset{7}{D}$
$12b^2bc$	1,1,2,3	$12a^2bc$
$4ab^2$	1,2,2,2	$4ab^3$
$e^7E = 5a^4c$	1,1,1,1,3	$5a^4c = \overset{7}{E}$
$10a^3b^2$	1,1,1,2,2	$10a^3b^2$
$f^7F = 6a^5b$	1,1,1,1,1,2	$6a^5b = \overset{7}{F}$
$g^7G = a^7$	1,1,1,1,1,1,1	$a^7 = \overset{7}{G}$

Diese Darstellung, die hier nur exempelsweise für die Zahl 7 gegeben worden ist, kann eben so, nach den von Herrn Hindenburg erwiesenen Regeln und Formeln der combinatorischen Zerfällungen und der Versetzungszahlen [hh]) für jede

hh) Infin. Dignit. p. 129 seq. und p. 31. 32.

jede andere Zahl ausgeführt werden. Daraus erhellet denn unmittelbar folgendes:

1) Die Quelle, aus welcher alles fließt, ist, was hier in der Mitte steht, die Zerfällung der gegebenen Zahl, verbunden mit der jeder daraus abgeleiteten Buchstabencomplexion beyzufügenden Versetzungszahl. Wer also, wie erstere zu machen und leztere zu finden sey, entweder gar nicht, oder nicht deutlich genug zeigt, der verläßt den Leser in dem, was gerade das Hauptwerk bey der ganzen Sache ist.

2) Die (rechter Hand hier stehenden) Fischerischen Dimensionsordnungszeichen, kommen mit den (linker Hand hier befindlichen) Hindenburgischen, verbundenen Permutations- und Combinationsclassenzeichen, ihrem Werthe und Inhalte nach vollkommen überein.

3) Herrn Fischers Dimensionszeichen $\overset{n}{A}$, $\overset{n}{B}$, $\overset{n}{C}$..... haben ihm, wie man hier deutlich sieht, wenig Mühe gekostet. Er schuf sie aus den Hindenburgischen Combinationszeichen a^nA, b^nB, c^nC..... durch Vernichtung und Umwandlung, indem er den kleinen deutschen Buchstaben ganz weglies, und dafür die Summenzahl oder Marke n von der linken Seite des grossen Buchstabens oben, gerade über ihn, sezte.

4) Die Fischerische Zeichnung ist fehlerhaft, weil sie zwey, von einander ganz verschiedene, Combinationselemente a und ^nA; b und ^nB; c und ^nC rc. die nicht immer und nothwendig beysammen, oft getrennt sind, durch ein Zeichen $\overset{n}{A}$, $\overset{n}{B}$, $\overset{n}{C}$.... darstellt. Herr Fischer hat nun keine Zeichen für die *einzelnen* Ordnungen der Zahlen- oder Buchstabencomplexionen, wie die Hindenburgischen ^nA, ^nB, ^nC,.... sind. Daß dergleichen Fälle bey den Anwendungen, die Herr Fischer in seinem Buche macht, nicht vorkommen, kann ihm nicht zur Entschuldigung dienen, zeigt blos, daß er durch die Art, wie er die Sache ansieht und begründet,

sich

sich das Ziel viel zu nahe gesteckt, und den Wirkungskreis zu sehr verengt hat.

Bey Herrn Hindenburg werden beständig die Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten durch kleine deutsche Buchstaben a, b, c..... die Combinationsclassen, mit ihren Summenexponenten n zur Seite, durch grosse lateinische Buchstaben ⁿA, ⁿB, ⁿC..... bezeichnet, und den Ausdrücken, worin dergleichen Zeichen vorkommen, ein Zeiger beygefügt, welcher bestimmt, ob sich die Zahlen der Complexionen auf Glieder oder Coefficienten vom ersten, zweyten, dritten ꝛc. an gerechnet, beziehen. Nicht so Herr Fischer, der nicht nur beiderley Zeichen durch eins vorstellt: sondern auch für seine Ordnungen, nicht blos das lateinische grosse Alphabet (wie in der obigen Darstellung, und bey Herrn Fischer, §. 117, S. 95. 96. und §. 136, S. 126. 127. geschehen) sondern auch andere Alphabete, grosse und kleine, ja auch römische Zahlen, mit überschriebenen Marken, braucht. (§. 34.) Diese Mannigfaltigkeit der Dimensionszeichen wird jedoch (§. 14.) dahin eingeschränkt, daß Buchstaben mehrerer Alphabete nur in besondern Fällen und vornemlich dann gebraucht werden sollen, wenn mehrere Reihen in einer Rechnung vorkommen; wofür Herr Hindenburg die Reihenbuchstaben p, q, r.... über die Classenzeichen $^n\overset{p}{A}$, $^n\overset{qp}{B}$, $^n\overset{rqp}{C}$.... sezt. Der Gebrauch endlich durch das ganze Fischerische Werk, so wie die (§. 57. und §. 71. S. 47.) befindlichen Nachrichten, haben festgesezt: „in allen Fällen, wo nicht ausdrücklich etwas anders be„stimmt wird, die Römischen Zahlen I, II, III, IV. ꝛc. als „Dimensionszeichen zu brauchen, wenn die Coefficienten „einer Reihe, vom ersten Gliede an bezeichnet werden sollen, „und dazu in der ersten Ordnung die Markenreihe 1, 2, 3, „4 ꝛc. zu nehmen. Sollen aber die Coefficienten eben der„selben Reihe, nur vom zweyten Gliede an, mit Dimen-

„sionszeichen

„sionszeichen bezeichnet werden, so sollen dazu die deutschen „grossen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ rc. als Dimensionszei„chen genommen, und in der ersten Ordnung die Marken „2, 3, 4, 5 rc. gebraucht werden."

Herr Fischer hat also zweyerley verschiedene Dimensionszeichen für die Potenzen, römische Zahlen und grosse deutsche Buchstaben, auch zweyerley Markirungen in den ersten Ordnungen, nemlich 1, 2, 3, 4.... bey jenen, und 2, 3, 4, 5.... bey diesen. Was diese verschiedene Markirung für einen Einfluß auf die höheren Ordnungen hat, zeigt §. 46. S. 29. und die hier am Ende beygefügte Tafel IV, C. Bey den römischen Zahlen fangen die Marken der höheren Ordnungen mit der Zahl der Ordnung an: $\overset{2}{\text{II}}, \overset{3}{\text{II}}$..., $\overset{3}{\text{III}}, \overset{4}{\text{III}}$..., $\overset{4}{\text{IV}}, \overset{5}{\text{IV}}$..., u. s. w. bey den Buchstaben hingegen, fangen die Marken der höheren Ordnungen mit der doppelten Zahl der Ordnungen an: $\overset{4}{\mathfrak{B}}, \overset{5}{\mathfrak{B}}$.... $\overset{6}{\mathfrak{C}}, \overset{7}{\mathfrak{C}}$...., $\overset{8}{\mathfrak{D}}, \overset{9}{\mathfrak{D}}$.... u. s. w. Man sehe hinten Tafel IV, A. B. Daraus folgt die Vergleichung zwischen den Hindenburgischen Combinations- und den Fischerischen Dimensionszeichen, im ersten Falle,

$$\mathfrak{a}^n A = \overset{n}{\text{I}},\ \mathfrak{b}^n B = \overset{n}{\text{II}},\ \mathfrak{c}^n C = \overset{n}{\text{III}},\ \mathfrak{d}^n D = \overset{n}{\text{IV}},\ \text{rc.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{pmatrix}$$

und im zweyten Falle,

$$\mathfrak{a}^n A = \overset{n+1}{\mathfrak{A}},\ \mathfrak{b}^n B = \overset{n+2}{\mathfrak{B}},\ \mathfrak{c}^n C = \overset{n+3}{\mathfrak{C}},\ \mathfrak{d}^n D = \overset{n+4}{\mathfrak{D}}.\ \text{rc.}$$

oder

$$\overset{n}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}^{n-1} A,\ \overset{n}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{b}^{n-2} B,\ \overset{n}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{c}^{n-3} C,\ \overset{n}{\mathfrak{D}} = \mathfrak{d}^{n-4} D,\ \text{rc.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

wodurch man beiderley Zeichen sogleich auf einander bringen kann. Eine allgemeine Reduction solcher Zeichen, von welchem

chem Gliede der gegebenen Reihe an, die Coefficienten auch immer bezeichnet seyn mögen, findet man in der hier beygefügten Tafel III. und die weitere Anwendung in Tafel IV.

Wenn Herr Fischer in der Vorrede seines Werks (S. V.) seine Bezeichnungsart, als die einzige einfache und leichte, der Hindenburgischen vorzieht, und sogar behauptet, jene reiche weiter als diese: so sind die Leser nun im Stande, von der Richtigkeit dieses Vorgebens selbst zu urtheilen. Die Fischerischen Dimensionszeichen sind ja keine andere als Hindenburgische, nur absichtlich verstellte, Combinationszeichen, und können die ersten, nach dem so eben Beygebrachten, sogleich auf die leztern reducirt werden. Wenn Herr Fischer glaubt, er habe eine wichtige Verkürzung angebracht, daß er zwey Hindenburgische Zeichen (für die Versetzungszahlen und Combinationsclassen) durch ein einziges (römische Zahlen oder grosse deutsche Buchstaben) dargestellt hat: so ist das Fehlerhafte dieser Bezeichnung schon im Vorhergehenden gerügt worden. Die Einrichtung aber, alle Coefficienten oder Glieder einer gegebenen Reihe, in der ersten Ordnung mit einerley Zeichen und darüber gesezten Zahl oder Marke zu bezeichnen, wovon nachher die Bezeichnung der folgenden höheren Ordnungen abhängt, so wie die Aufführung von zweyerley solchen Zeichen, (Zahlen und Buchstaben) worin Herr Fischer auch einen Vorzug sezt, sticht gegen die Simplicität der Hindenburgischen Bezeichnungsart, wo für die Coefficienten und Glieder blos ihre Ordnungszahlen gebraucht, und selbige nach Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen in Classen geordnet werden, sehr ab, und hebt die Harmonie der mehreren Zeichen, bey ihren Zusammentreffen, auf. Die Absicht, die Herr Fischer bey seinen beiderley Dimensionszeichen hat, daß man nemlich dadurch gleich sehen soll, ob die Coefficienten einer Reihe vom ersten oder zweyten Gliede an bezeichnet sind: wird ja durch den jederzeit beyzufügenden Hindenburgischen Index

eben

eben so gut, und noch besser, befördert, weil dieser allemal mit der Hauptformel, die das gesuchte Resultat enthält, verbunden ist, da man hingegen, in vielen Fällen, bey Herrn Fischer hin und her suchen muß, wenn man wissen will, zu was für Coefficienten oder Glieder die römischen Zahlen oder die grossen deutschen Buchstaben, in ihrer ersten Ordnung gehören. Die Hindenburgische Bezeichnung bleibt immer dieselbe und immer gleich einfach, die Zahlen oder Marken mögen vom ersten, zweyten, dritten .... mten Gliede oder Coefficienten anfangen; da hingegen schon die Markirung vom zweyten Gliede ab, die Fischerischen Summenexponenten über den grossen deutschen Buchstaben, ohne irgend einen Vortheil daraus ziehen zu können, erhöhet, und die Markirung vom dritten, vierten .... Gliede an, selbige noch ungleich mehr erhöhen würde. Man sehe hier die Tafel III. und IV. Herr Fischer hat auch am Ende seines Werks, nur aber zu spät, die Unbequemlichkeit seines Verfahrens von dieser Seite wohl eingesehen.

Die Reihe

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ꝛc.}$$

zu der nten Potenz zu erheben, sagt er (§ 367.) ausdrücklich, wolle er jedem Gliede der Reihe, vom zweyten an, diesmal nicht (wie sonst immer) $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$. ꝛc. sondern $\overset{1}{I}, \overset{2}{I}, \overset{3}{I}$. ꝛc. zum Dimensionszeichen geben, (das ist gerade das Hindenburgische Verfahren, in Fischerischen Zeichen ausgedrückt; nur daß Herr Hindenburg die hier überschriebenen Zahlen 1, 2, 3.... sogleich auf die Coefficienten der gegebenen Reihe bezieht, nicht erst, wie Herr Fischer, noch besondere Zeichen I oder 𝔄 zugesellt, die am Ende von neuem übersezt und gegen die Coefficienten ausgetauscht werden müssen) und sezt hinzu: das habe auf die höhern Ordnungen weiter keinen Einfluß, als daß die Marken in der zweyten Ordnung sich nicht mit 4, sondern mit 2; in der dritten

Ord-

Ordnung sich nicht mit 6, sondern mit 3, u. s. f. anfangen. Herr Fischer gesteht hierdurch zweyerley: 1) daß er wohl auch hätte nur mit einartigen Dimensionszeichen (Buchstaben oder Zahlen) auskommen können, und 2) daß die Einführung der grossen deutschen Buchstaben zu der oben angezeigten Absicht, sogar die Unbequemlichkeit höherer Marken und der daher, ohne allen Zweck und Nutzen vergrösserten Summenexponenten, herbeyführe. Die einfachere Hindenburgische Darstellung, bey seiner Bezeichnungsart, bewährt sich aber auch noch durch einen andern Umstand, den das Fischerische Exempel (Ebend. II. Th. S. 168.) zugleich darlegt: die Summenexponenten nemlich werden in solchem Fall, nach dem Hindenburgischen Verfahren, bey seinen grossen lateinischen Classenbuchstaben nicht nur immer kleinere Zahlen seyn, als die Marken bey den Fischerischen grossen deutschen Ordnungsbuchstaben, sondern sie bleiben auch bey jedem einzelnen Gliede immer dieselben, da sie bey Herr Fischern in steigender Progression fortgehen. So gehören, in dem Fischerischen, nach Hindenburgischer Art behandelten Exempel (S. 168.) zu der Potenz x^3, die Zeichen $\overset{3}{I}$, $\overset{3}{II}$, $\overset{3}{III}$. (d. i. a^3A, b^3B, c^3C) nach der gewöhnlichen Fischerischen Behandlung aber, die Zeichen $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, wie aus §. 67. S. 44. erhellet, wenn man dort $r=1$ sezt.

Um die Werthe solcher, aus der unvollzähligen oder verkürzten Markirung 2, 3, 4.... entstehenden Dimensionszeichen $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, und anderer dergleichen, aus der Fischerischen Tafel I. zu finden, welche geradezu nur für die vollzählige (vom ersten Gliede anfangende) Markirung 1, 2, 3.... eingerichtet ist, muß man mit den Marken der Dimensionszeichen der ersten und jeder höhern Ordnung, noch zuvor eine Veränderung, wie solche in der jener Tafel beygefügten Anweisung beygebracht ist, vornehmen. Wenn auch

auch diese Reduction nicht schwierig ist, so kann sie doch für mehrere und spätere Dimensionsordnungen beschwerlich werden, und ist um so mehr unnütze und lästig, da sie durch nichts vergütet wird, und durch das Hindenburgische Verfahren ganz erspart werden kann.

Noch giebt die eben angeführte Fischerische Stelle (§. 367.) Veranlassung zu folgender Bemerkung. Herr Fischer hat für die Binomialcoefficienten keine bestimmten Zeichen. Sehr häufig schreibt er sie, ohne alle Verkürzung, nach ihren Exponenten $\frac{n}{1}$; $\frac{n.n-1}{1.\ 2}$; $\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}$; $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$... zuweilen (§. 67. 89. u. a. O.) braucht er dafür die Buchstaben α, β, γ, δ..... durch welche jedoch §. 81. 94. und an vielen andern Orten überhaupt jede erst in der Folge weiter zu bestimmende Coefficienten (Coefficientes ficti vel assumti) ausgedrückt werden. Nach Art der Dimensionszeichen stellt er sie (§. 149.) so: $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha}$, $\overset{3}{\alpha}$....$\overset{p}{\alpha}$ und (§. 167. 367.) durch $\overset{1}{n}$, $\overset{2}{n}$, $\overset{3}{n}$....$\overset{p}{n}$ dar. Herr Fischer mag es wohl endlich eingesehen haben, daß Zeichen für Binomialcoefficienten, die nichts von Exponenten, worauf sie sich beziehen, enthalten, leere, blos als Verkürzung zu brauchende, nicht aber wissenschaftliche, Zeichen sind. Die beste Zeichnung dafür, in mehrerer Rücksicht, ist die Hindenburgische: ⁿ𝔄, ⁿ𝔅, ⁿ𝔆, ⁿ𝔇, ꝛc. die aber freylich Herr Fischer nicht brauchen, und neben seine Dimensionszeichen hinstellen durfte, um sich nicht zu sehr zu verrathen. Diese Zeichnung ist um so nützlicher für Formeln, worinnen mehrere Binomialcoefficienten von verschiedenen Exponenten vorkommen, oder für Tafeln, welche die so wichtigen Relationen der Binomialcoefficienten gegeneinander enthalten, wodurch jeder durch jeden ausgedrückt, auch Producte ihrer Factoren in Summen und umgekehrt ꝛc. dargestellt werden können. Eine Tafel dieser Art hat Herr Prof. Hindenburg

denburg unter mehreren, die noch nicht bekannt sind, entworfen.

Das hier Beygebrachte wird hoffentlich die Wahrheit hinlänglich bestätigen: daß die Fischerischen sogenannten Dimensionszeichen, nichts anders als Hindenburgische, nur absichtlich verstellte, Combinationszeichen sind; und daß dasjenige, was Herr Fischer daran oder deswegen verändert hat, und er sogar für Verbesserung hält oder doch ausgiebt, theils wirklich fehlerhaft sey, theils unnöthige Weitläuftigkeit veranlasse, theils die Simplicität und Harmonie, welche die Hindenburgischen Zeichen in ihrem Zusammentreffen geben, aufhebe und vernichte.

Ich gehe nun auf die andere Art Fischerischer Dimensionszeichen, in Beziehung auf Producte aus Factoren von endlicher oder unendlicher Anzahl von Gliedern fort; von denen Herr Fischer im achten Abschnitte des zweyten Theils (von § 265 — 275.) aber nur sehr flüchtig gehandelt hat. Ich könnte sie, da von ihnen nur wenige und unerhebliche Anwendungen (nur in 2 Beyspielen) gemacht worden sind, ganz übergehen. Ich nehme sie aber mit, weil Herr Fischer auch von dieser Art Dimensionszeichen, eine Theorie, wie er sie nennt, gegeben hat, und weil sie zu ganz ähnlichen Erinnerungen, wie die erstern, Veranlassung geben.

II. Entwickelung der Variationen der Zahl 5 nach gut geordneten Classen, mit beygefügten Hindenburgischen und Fischerischen Combinations- und Dimensionszeichen zur Seite.

Nach

Nach Hindenburg		Nach Fischer	
$^{s}A =$	$\overset{p}{5}$	$\overset{a}{5}$	$= \overset{s}{a}$
$^{s}\overset{qp}{B} =$	$q\,p$	$a\,a$	$= \overset{s}{a\,a}$
	1 4	1 4	
	2 3	2 3	
	3 2	3 2	
	4 1	4 1	
$^{s}\overset{rqp}{C} =$	$r\,q\,p$	$\mathrm{I}\,a\,a$	$= \overset{s}{\mathrm{I}\,a\,a}$
	1 1 3	1 1 3	
	1 2 2	1 2 2	
	1 3 1	1 3 1	
	2 1 2	2 1 2	
	2 2 1	2 2 1	
	3 1 1	3 1 1	
$^{s}\overset{srqp}{D} =$	$s\,r\,q\,p$	$\mathfrak{A}\,\mathrm{I}\,a\,a$	$= \overset{s}{\mathfrak{A}\,\mathrm{I}\,a\,a}$
	1 1 1 2	1 1 1 2	
	1 1 2 1	1 1 2 1	
	1 2 1 1	1 2 1 1	
	2 1 1 1	2 1 1 1	
$^{s}\overset{tsrqp}{E} =$	$t\,s\,r\,q\,p$	$A\,\mathfrak{A}\,\mathrm{I}\,a\,a$	$= \overset{s}{A\,\mathfrak{A}\,\mathrm{I}\,a\,a}$
	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	

Die Entwickelung der Variation einer gegebenen Zahl ist hier nur exempelsweise für die Zahl 5, aus eben der Ursache, wie oben (in I.) die combinatorische Entwickelung für die Zahl 7, vorgetragen worden.

Eben so können jeder andern Zahl n Variationen, nach festbestimmten von Herrn Hindenburg erwiesenen Regeln [ii] con-

ii) Infin. Dign. p. 129 — 134.

construirt und dargestellt werden. Unmittelbar erhellt daraus folgendes:

1) Die Folge der Zahlencomplexionen ist auch hier die Hauptsache, wie in I.

2) Die Menge derselben ist aber grösser, wie dort, weil hier alle gut geordnete Complexionen vorkommen, und mit ihnen noch andere, die es nicht sind.

3) Dennoch sind die Classen gut geordnet, d. i. die Complexionen in ihnen gehen unter einander so fort, wie Zahlen wachsen.

4) Die Hindenburgischen Classenzeichen für die Variationen, haben vollkommene Aehnlichkeit mit jenen für die Combinationen. Auch hier werden die Classen nach der Folge der grossen lateinischen (nur aber Cursiv-) Buchstaben angegeben, haben den Summenexponenten oben linker Hand neben sich, und weil sich die einzelnen Zahlen der Complexionen, auf verschiedener Reihen, p, q, r, s, t..... Coefficienten oder Glieder beziehen, so sind diese Reihenbuchstaben oben über die Classenzeichen beygefügt.

5) Die Fischerischen Variationsordnungszeichen sind mit seinen obigen Dimensionszeichen gar nicht ähnlich. Herr Fischer hat nemlich für die Variationen keine solche Classen- oder Ordnungszeichen, dergleichen die Zahlen I, II, III.... oder Buchstaben A, B, C.... für die Combinationen waren. Er zeichnet die Ordnungen blos durch die Verbindung von Anfangsbuchstaben AAaa..... mehrerer Alphabete, auch wohl mit Einmischung der Zahl I. und setzt den Summenexponenten oder seine Marke, wie bey den ersten Dimensionszeichen, darüber. Das hat grosse Unbequemlichkeit für spätere Classen grösserer Zahlen, und noch mehr, wenn es zu Formeln kommt, die mehrere solcher Classenzeichen enthalten, oder wenn man Relationen solcher Classen unter einander und gegen die Combinationsclassen angeben soll, dergleichen bey Herrn Hindenburg vorkommen. Doch

darf

darf man in diesem so flüchtig gearbeiteten Abschnitte des Fischerischen Werks, so etwas eben so wenig suchen und vermuthen, als man darinne allgemeine Glieder von Producten von 2, 3, 4.... m Reihen antreffen wird, ob sie schon den natürlichsten Uebergang zu den Potenzen darstellen.

Aus allem erhellet ganz deutlich, daß, weil Herr Hindenburg sich so ausführlich über die Producte aus Reihen herausgelassen hat, auch Herr Fischer in seinem Werke damit nicht hat zurückbleiben wollen. Weil aber die Hindenburgischen Formeln schon etwas tiefer in die Combinationslehre eingreifen, und die wenigen Sätze, die Herr Fischer davon im ersten Theile seines Werks (von §. 1. bis §. 2.) aufgeführt hat, hier nicht zu reichen; so ist auch die Untersuchung über die Producte der Reihen sehr kurz abgebrochen, den combinatorischen Formeln aber für die Division der Reihen durch einander, sogar aller Nutzen abgesprochen, und ihnen das beschränkte Moivrische Verfahren vorgezogen worden.

Was man doch nicht alles von Dingen, die man nicht ganz übersieht, oder die man gern von sich abwälzen will, vorbringen kann.

Bey solchen Umständen wäre es wohl unnöthig, Herrn Hindenburgs und Herrn Fischers Verfahren mit einander in Vergleichung zu stellen, und über das, was bey beiden einerley oder verschieden ist, wie weit das eine vorwärts bringt, das andere zurück bleibt, noch ein Wort zu verlieren.

Nur von den Zahlencomplexionen für Variationen und ihrer Folge, und wie sich Herr Fischer derselben bedient, noch ein Wort.

Was das leztere anbetrift, so sind hier, um das Verfahren dafür deutlich nachzuweisen, über jeder Classe oder Ordnung die Fischerischen Buchstaben über die Zahlen gesezt, mit denen sie als Marken auf die gewöhnliche Art nach und

nach zu verbinden sind. So geben die Buchstaben *aa* über den Zahlencomplexionen der zweyten Ordnung, die zweyte Classe zur Summe 5. d. i.

$$\overset{5}{aa} = \overset{14}{aa} + \overset{23}{aa} + \overset{32}{aa} + \overset{41}{aa}$$

und die Buchstaben I*aa* über den zugehörigen Zahlencomplexionen, die dritte Classe oder Ordnung zur Summe 5, d. i.

$$\overset{5}{Iaa} = \overset{113}{Iaa} + \overset{122}{Iaa} + \overset{131}{Iaa} + \overset{212}{Iaa} + \overset{221}{Iaa} + \overset{311}{Iaa}$$

u. s. w. bey den übrigen Classen und andern Zahlen.

Herr Fischer hat (§. 267.) dergleichen Entwickelung, aber nur für die zweyte und dritte Ordnung bis zur Summe 6. gegeben. Die Folge der Zahlencomplexionen für sein dortiges $\overset{5}{\mathfrak{A}A}$ kommt mit der für das hiesige $\overset{5}{aa}$ überein, nicht aber die dortige für $\overset{5}{A\mathfrak{A}I}$ mit der hiesigen $\overset{5}{Iaa}$. Die hier in der Darstellung II. vorkommenden, sind alle gutgeordnete Zahlencomplexionen und folgen der Hindenburgischen Regel, welche dadurch sehr erleichtert wird.

Nach welcher Regel läßt denn nun aber Herr Fischer seine Complexionen auf einander folgen? Darauf giebt er (§. 266.) folgenden Bescheid: „Das zusammengesezte Di„mensionszeichen, $\overset{n}{I\mathfrak{A}Aa}$ zum Beyspiel, sey die algebraische „Summe aller Producte von vier Dimensionen, aus vier „Dimensionszeichen der ersten Ordnungen I, $\mathfrak{A}$, *A* und *a*, „folglich müsse man 1) zu jedem solchen Producte aus jeder „der vier genannten Ordnungen ein Glied nehmen, derge„stalt, daß 2) in jedem dieser Producte die Summe der vier „Marken = n sey." Daraus zieht Herr Fischer (§. 267.) die lehrreiche allgemeine Vorschrift: Die Regel der Entwickelung der Werthe dieser Dimensionszeichen liege in den Zeichen selbst; und tröstet den Leser, der sich hier ganz verlassen sieht, noch zulezt (§. 279. S. 93.) damit, daß, „obgleich die Werthe der zusammengesezten Dimensionszei-

„chen mit jedem Gliede immer zusammengesezter werden, „dennoch die Berechnung derselben leicht und schnell von „statten gehe, wenn man nur einige Fertigkeit im Zusam„mensetzen der Zahlen aus Theilen habe, und dabey den „kleinen Vortheil beobachte, die Werthe der einfachen Di„mensionszeichen so zu stellen, daß die zu einer Reihe gehö„rigen Dimensionszeichen horizontal oder vertical unter ein„ander zu stehen kommen!"

Wenn die Werthe der höhern Ordnungen von Dimensionszeichen für Variationen immer zusammengesezter werden, so werden sie doch auch wohl verhältnißmässig schwerer und mühsamer zu finden seyn, und wenn man von Berechnung dieser Werthe spricht, so sollte doch auch die Regel dafür angegeben seyn, damit man sich die nöthige Fertigkeit in leichter Bestimmung solcher Werthe, wie im wissenschaftlichen Fache immer der Fall ist, durch öftere Anwendung bestimmter Vorschriften, erwerben könne, ohne die Sache aufs Ungefähr ankommen zu lassen, womit man auch ganz gewiß nichts ausrichtet, wie jeder, der es versuchen will, sogleich erfahren wird. Wer sieht hier nicht klar und deutlich das geflissentliche Bestreben, das Herr Fischer anwendet, der ausdrücklichen Angabe einer Regel für die Variationsdiscerptionen zu bestimmten Summen (eben so wie vorher für die Combinationsdiscerptionen) auszuweichen! — weil er keine andere als die Hindenburgische hätte geben können, er aber gleichwohl das Ansehen haben will, als habe er die Hindenburgischen Schriften bey seinen Untersuchungen nicht benuzt.

Vielleicht, könnte man denken, sezt Herr Fischer voraus, der Leser werde aus den (§. 267. S. 85.) vorkommenden Zahlendiscerptionen sich die Regel schon selbst abstrahiren. Das dürfte nun aber bey den dortigen wenigen Variationsdiscerptionen so kleiner Zahlen, (die höchste ist 6.) und so niedriger Ordnungen (die höchste ist die dritte) unmöglich,

möglich, wenigstens ungleich schwieriger seyn, als bey den Combinationsdiscerptionen, von welchen fast auf allen Seiten des Fischerischen Werks Beyspiele vorkommen, auch am Ende des Fischerischen Werks die Hindenburgische in Fischerische Zeichen travestirte Tafel (No. I.) beygefügt ist, die der Beobachtung für die Abstraction schon ein ungleich grösseres Feld eröffnet.

Doch, wir wollen sehen! Da unsere Leser schon wissen, was gut geordnete Complexionen sind, so kann es nicht fehlen, sie werden sie in der Folge der Zahlendiscerptionen von zwey Dimensionen von $\overset{2}{\mathfrak{A}}A$ bis $\overset{6}{\mathfrak{A}}A$ (§. 267.) sogleich erkennen. Ganz anders verhält es sich mit den Zählendiscerptionen von drey Dimensionen, bey $A\overset{3}{\mathfrak{A}}I$ bis $A\overset{6}{\mathfrak{A}}I$, (Ebend.) wo man die Folge gutgeordnetfortgehender Zahlencomplexionen bey $A\overset{5}{\mathfrak{A}}I$ und $A\overset{6}{\mathfrak{A}}I$ unterbrochen finden wird; und ein Leser, der nichts von der Combinationslehre versteht, wird nicht einmal wissen, wie er sich dabey benehmen soll, und worauf die Abweichung sich stütze und beziehe. Die hieher gehörige Combinationsregel, wie sie sich vornehmlich durch die Stellung der Discerptionswerthe für $A\overset{6}{\mathfrak{A}}I$ ganz deutlich ergiebt, ist folgende:

Man suche die Complexionen der bestimmten Summe nach allen Combinationen der bestimmten Ordnung, und mache von jeder einzelnen Complexion alle mögliche Permutationen.

Derselben Regel hat Herr Hindenburg bey Variationen zu bestimmten Summen sowohl als überhaupt (Variationes simpliciter) Erwähnung gethan [kk], selbige aber verworfen,

 weil

kk) Infin. Dign. p. 130. Sol. Ima und Nov. Syst. Perm. p. XXI. Sol. I.

weil sie verwickelter ist, als jene andere von ihm festgesezte, wo alle Variationen nach gut geordneten Classen fortgehen, d. i. wo die Variationscomplexionen so auf einander folgen, wie Zahlen wachsen. In das Fischerische Werk gehört aber jene Regel gar nicht, wenn sie auch noch so leicht in der Ausübung wäre; denn, wie gegebene Zahlen zu bestimmten Summen zu combiniren seyn, davon hat Herr Fischer keine Vorschrift gegeben, und des Verfahrens, wie man gegebene Dinge permutiren könne, mit keiner Sylbe gedacht, so viel er auch Veranlassung dazu, in Festsetzung und Begründung einer deutlicheren Formel für die Versetzungszahlen hatte, als er (§. 37.) gegeben hat. Aber Herr Fischer vermeidet alle Gelegenheit, geflissentlich der Combinationslehre, und was damit zunächst in Verbindung steht, zu gedenken, weil dergleichen Aeusserungen, bey seinem Gegenstande, und bey der Art, wie er solchen in seinem Werke behandelt hat, ihm nothwendig bedenklich vorkommen mußten.

IX.

Zweyte Fortsetzung. Einige Betrachtungen über die Hindenburgische Darstellung zusammengehöriger Zahlencomplexionen. Regeln derselben für einzelne Classen zu bestimmten Summen ausser der Ordnung, und worauf ihre Leichtigkeit bey der Darstellung beruhet.

Herr Fischer hat also gerade in der Hauptsache, worauf bey seinem Werke alles ankommt, seine Leser verlassen; man sieht aber auch aus dem Beygebrachten deutlich, warum er

das

das wissentlich und wohlbedächtig gethan, und wie er die offengelassene Lücke zu bedecken gesucht hat. Die Wichtigkeit der beiden Discerptionsprobleme, auf den Fuß, wie sie Herr Hindenburg zuerst gegeben hat, erhellet daraus, daß alle vorhergemachten Versuche, die so etwas voraussezten, theils sehr unvollkommen ausfielen, theils nur in den engen Gränzen der besondern Anwendung, die sie veranlaßt hatten, bleiben mußten, keinesweges aber die Basis zu einer allgemeinen Methode abgeben konnten. Die schon oben berührte Leibnitzische, und eben so die Moivrische Regel, die lezterer bey seiner Umkehrungsformel beybringt [ll]), um die Coefficienten derselben dadurch leichter zu bestimmen, sezt dergleichen Zerfällungen der Zahlen voraus, und Hausen [mm]), der davon in seinem Werke (S. 174. 175.) Gebrauch zu machen sucht, bringt auch wirklich (S. 178.) die Zerfällungen der Zahl 7 exempelsweise bey; aber die Zahlencomplexionen laufen da so durch einander, daß sie zwar (weil sie dort alle auf einmal angewendet werden) zu der vorhabenden Absicht, nicht aber überhaupt, brauchbar sind [nn]). Auch selbst Herr Prof. Hindenburg hat, bey aller Erleichterung, die er den Potenzen des Infinitinomiums in der ersten Abhandlung, vom Jahre 1779, wo er auf die Discerptionsaufgabe noch nicht gefallen war, verschaft hatte [oo]), dennoch bey weiten das

ll) Von diesen beiden Regeln sehe man hier die Noten f. dd. ee.

mm) Elementa Matheseos, in den oben angezeigten Stellen.

nn) Ueber die Hausensche Darstellung der Moivrischen Regel hat sich auch Herr M. Eschenbach (de Ser. Reverf. p. 8.) ausführlich erklärt.

oo) Man sehe die Noten q. s. Die zuerst gefundene Hauptformel für die Potenzen des Infinitinomiums steht in der dortigen Abhandlung (von 1778.) §. XV. und ist (in der neuen Auflage, oder dem vermehrten Abdrucke derselben, und der Dissertation vom 10ten Jun. 1779.) in Infin. Dign. — Hist. Leg.

das nicht leisten können, was er kurz nachher, in der darauf folgenden Dissertation (vom 10ten Jun. 1779.) geleistet hat, worinnen er das combinatorische Discerptionsproblem für bestimmte Zahlensummen zuerst vorträgt pp), mit

Leg. et Form. p. 40. 41. wiederholt. Diese Formel, wie sie da steht, giebt das Gesuchte ohne allen Vergleich viel leichter, als alle andere, bis zu diesem Zeitpuncte bekannte Formeln, es geben. Welcher Unterschied ist aber gleichwohl nicht zwischen ihr und jener andern, auf das combinatorische (in der Dissertation vom 9ten Jun. 1779. zuerst vorgetragene) Problem sich stützenden, und in combinatorisch-analytischen Zeichen ausgedrückten Formel, (p. 27. der Dissertation, und Infinit. Dign. p. 119. auch Nov. Syst. Comb. p LIV. no. 7. 8.) in Absicht auf Kürze und Eleganz beides der Darstellung und Entwickelung! Es ist wegen der Geschichte der combinatorischen Analytik interessant, das anzumerken; auch sieht man zugleich, was andere Erfahrungen bereits längst bestätigt haben, wie nahe man grossen und vielumfassenden Entdeckungen, die nur ein dünner Schleyer den Augen noch entzieht, seyn kann, ohne es zu ahnden. Die erste Formel, nemlich für die Potenzen des Infinitinomiums, ward durch die bald nachher als höchstwichtig befundene Auflösung der combinatorischen Discerptionsaufgabe, nicht nur aufs äusserste simplificirt und für die nöthige Entwicklung höchst bequem eingerichtet, sondern, was noch weit wichtiger ist, diese combinatorische und die dadurch veranlaßte Variationsaufgabe, (beide zu bestimmten Summen) nebst andern, wo nur Complexiones simpliciter und Permutationes vorkommen, in Verbindung mit dem dafür gewählten ausdruckvollen System der Zeichen, sind die Grundlage, auf welche Herr Professor Hindenburg das grosse und erhabene Gebäude der combinatorischen Analytik aufzubauen angefangen hat, das zwar an Umfang und Capacität sich immerfort erweitern, in Absicht aber auf Simplicität und Solidität nichts weiter gewinnen kann. Die combinatorische Analytik kennt, wie die übrige Analysis, keine Gränzen. Sie wird ein Studium für ewige Zeiten bleiben.

pp) §. III. der Dissert. von S. 6 bis 16. und Inf. Dign. p. 73 seq.

mit Beyfügung des dafür nöthigen Beweises in aller Strenge. Und so erfolgte denn nachher, bey der vermehrten Ausgabe der beiden obigen zusammen gedruckten Abhandlungen, (Infin. Dign. — 1779.) das zweyte wichtige Hauptproblem, für Variationen der Zahlen zu bestimmten Summen, nebst ausführlichen weitern Anwendungen von beiden auf die Analysis qq), als eben so vielen Beyspielen einer von Herrn Hindenburg ganz neufundirten, combinatorischen Analytik, woran vorher gar nicht zu denken war. Das zeigt also die Wichtigkeit dieser beiden Probleme, und eben deswegen hat auch Herr M. Eschenbach, der in seiner Abhandlung de Serierum Reversione, die Hindenburgische combinatorische Bezeichnung und Methode beybehalten und auf seinen Gegenstand weiter angewendet hat, von den gebrauchten Zeichen nur kurze Erklärungen gegeben, und darüber weiter auf die Hindenburgischen Schriften verwiesen; was aber das von ihm gebrauchte combinatorische Hauptproblem der Zerfällungen anbetrift, so hat er es nicht für überflüssig gehalten, von solchem, seiner Wichtigkeit und unmittelbaren Anwendung wegen, die Hindenburgische Auflösung, so wie den Beweis, mit den beiden Tafeln der Zerlegungen der Zahlen von 2 bis 10 auch seiner Schrift beyzufügen und einzuverleiben rr).

Wenn man die Hindenburgischen Auflösungen dieser beiden Discerptionsprobleme nachsieht, so muß man sich wundern, mit welcher Leichtigkeit dort die Complexionen folgender Classen aus vorhergehenden, und so auch die Complexionen einzelner Classen unter sich, hergeleitet werden; obschon, nach Leibnitzens Ausspruch: (Note f) ubi plures partes

qq) Infin. Dign. p. 129 seq. Mehrere Anwendungen p. 135 seq.

rr) Eschenb. de Serier. Reverf. p. 15 bis 20. und die Tafeln p. 36. 37.

partes admittuntur, ingens panditur abyssus discerptionum. Selbst grosse Zahlen und späte Classen können die Zerfällung nach dem Hindenburgischen Verfahren blos (wegen der Menge von Complexionen) weitläuftig, aber keineswegs schwierig machen. Wenn nun aber doch Herr Euler [ss]) ausdrücklich behauptet: qui actu, (durch wirkliche Darstellung) omnes partitiones (Zahlencomplexionen von bestimmter Summe) dinumerare voluerit, non solum in immensum laborem se immergit, (nemlich bey grossen Zahlen) *sed omni etiam attentione adhibita vix cavebit* (wegen der Schwierigkeit keine zu verfehlen) *ne turpiter decipiatur*: so muß doch wohl die Leichtigkeit und Unfehlbarkeit der Hindenburgischen Darstellung irgendwo ihren Grund haben.

Es wird für Leser, welche die Sache etwas genauer wollen kennen lernen, nicht unwichtig seyn, zu bemerken, was Herr Hindenburg (Nov. Syst. p. XVI.) in dieser Rücksicht wahrgenommen und benuzt hat: Operationum combinatoriarum

ss) Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. III. p. 16. in dem Vorberichte zu der Abhandlung de partitione numerorum, die Herr Euler hier viel ausführlicher, als in der Introd. ad Analys. Infin. T. I. Cap. XVI. behandelt hat. Herr Euler (Nov. Comm. Petr. am angeführten Orte S. 15.) erinnert sehr richtig, die Aufgabe de partitione numerorum, welche nur die Menge und Anzahl der Zerfällungen der Zahlen zu bestimmten Summen fordert, gehöre zu den combinatorischen, und rechnet es sich als ein Verdienst an, daß er sie, was nicht immer der Fall bey dergleichen Aufgaben wäre, ohne Induction, in aller Strenge gelöst und erwiesen habe. Inzwischen sind doch die von Herrn Euler dabey angewandten Hülfsmittel nicht die nächsten Quellen. Die Eulerischen Sätze und Relationen seiner Formeln fliessen weit leichter und natürlicher, aus den, was sich aus Betrachtung und Vergleichung jener andern, in der engsten Verbindung mit ihr stehenden combinatorischen Aufgabe, die Darstellung der Zerfällungen selbst betreffend, unmittelbar ergiebt.

natoriarum *fundamentum* et veluti *normam* propositam esse in *numeros scribendi modo* unam fere atque unicam, h. e. praestantissimam; denn man findet in der Zahlenreihe, wenn ihre Glieder nach der Ordnung, oder sprungweise, oder sonst nach einem bestimmten Gesetze fortgehend genommen werden, die mannichfaltigsten Beyspiele von Combinationen, Permutationen und Variationen aller Art. Dieser einzige Gedanke, mit Bewußtseyn und in Beziehung auf combinatorische Veränderungen gedacht, führte Herrn Hindenburg auf dem nächsten Wege zu seinem Endzwecke, die Combinationslehre in ihren Regeln und Vorschriften möglichst zu vereinfachen, indem er alles auf das simple Verfahren, *Zahlen aus ihren Elementen, nach gewissen Absichten und Vorschriften zu schreiben*, (ad simplicissimas numerandi leges, sagt Herr Hindenburg am angeführten Orte) zurück führte. Das zeigte ihm die Nothwendigkeit der Abtheilung der Zahlencomplexionen in bestimmte Classen, und der Festsetzung *gut geordneter Complexionen* und *gut geordneter Classen*: jener, in Absicht auf die Elemente, woraus jede einzelne Complexion besteht; dieser, in Absicht auf die Folge der einzelnen Complexionen, aus denen die Classe zusammengesezt wird. Das machte es möglich, die Regeln nicht nur auf die einfachste und zugleich allgemeinste Art auszusprechen, wie sie für alle Zahlensysteme auf einmal (nicht blos für das dekadische) wahr sind, sondern auch das leichteste Verfahren in Anwendung der Regeln, dabey festzusetzen **).

Wenn

**) Nur ein Exempel aus mehrern: Alle mögliche Versetzungen der Dinge a, b, c, d, e, f, darzustellen. Sezt man für diese Dinge die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, so läßt sich die Regel dafür kurz so aussprechen: Man schreibe die kleinste sechsziffrige Zahl 123456 und alle gleichvielziffrige successiv-grössere Zahlen, nach der Ord-

Wenn also Herr Fischer an mehrern Orten seines Werks behauptet, es habe keine Schwierigkeit, aus gegebenen Dimensionszeichen der ersten Ordnung, die Dimensionszeichen

Ordnung, bis zur größten 654321, die sich aus den gegebenen Ziffern, oder Elementen (und keinen andern) schreiben lassen: so hat man alle mögliche Versetzungen in Ziffern, und dadurch auch in Buchstaben dargestellt, (Nov. Syst. Comb. p. XVII. no. 3.) die wirkliche Darstellung bey vier Dingen z. B. zeigt das dortige Exempel, No. 4. daraus denn die leichte Regel folgt, vermöge welcher man aus einer gegebenen Permutationscomplexion, die nächstfolgende (und dadurch alle) schreiben kann, wie sie Herr Hindenburg in der Vorrede zu Rudig. Spec. anal. de lin. curv. p. XLVI. vorträgt. Von dieser Art sind auch die andern Vorschriften im Allgemeinen, und die daher fliessenden Regeln für die Anwendungen im besondern, oder für einzelne Fälle. Es kommt immer darauf hinaus: Zahlen, aus gegebenen Ziffern oder Elementen, in steigender Reihe, nach gewissen Vorschriften zu schreiben. Diese Vorschriften hängen von den Bedingungen der Aufgabe ab, und sind immer, an diesen Umstand gebunden, leichter als andere, bey denen man auf dergleichen gut geordnete Folge der Zahlencomplexionen unter einander, nicht selten auch zugleich ihrer Theile unter sich, nicht sieht. Die gegebenen Ziffern können immer als Elemente eines bestimmten Zahlensystems angesehen werden, nur daß man in den gewöhnlichen Fällen die Null [0] und die Zahlen, worin sie mit vorkommt, nicht braucht. (Nov. Syst. Comb. p. XXI. XXII. 17. 18.) Für Zahlensysteme, von weniger Grundzeichen als das dekadische, kann man ihre Elemente durch gewöhnliche gemeine Ziffern ausdrücken; für Systeme hingegen, von mehr als zehn Grundzeichen, kann man die dekadischen Zahlen 10, 11, 12, 13, 14 rc. immittelst als einfache Grundzeichen oder Elemente ansehen und gebrauchen, und, Misdeutung vorzubeugen, selbige von den andern durch ein Comma trennen. (Nov. Syst. Comb. p. XXIII. 20.)

zeichen der höhern Ordnungen zu finden: so liegt dabey stillschweigend die Bedingung zum Grunde, daß man die Darstellung, nach der von Herrn Hindenburg dafür getroffenen Einrichtung und Vorschrift, in gutgeordneten Zahlencomplexionen und Classen verrichte, wie auch er durchgängig in unzähligen Stellen seines Werks gethan hat; wovon ich nur zwey sehr eminente Beyspiele, die Darstellung aller Ordnungen oder Classen der Zahlen nach der Reihe von 2 bis mit 11 in der ersten Tafel am Ende seines Werks, und die Entwickelung der fünften Classe von der Zahl 13 (§. 52.) anführen will. Denn ohne diese oder ähnliche Vorschriften (dergleichen doch Herr Fischer nicht gegeben hat) bleibt es wegen der Schwierigkeit bey Leibnitzens und Eulers oben (S. 72.) angeführten Aussprüchen.

Herr Hindenburg hat von jeder der beiden oftererwähnten Discerptionsaufgaben zwey Auflösungen beygebracht; die eine, wo Complexionen folgender, aus Complexionen vorhergehender Classen, die andere, wo folgende Complexionen aus unmittelbar vorhergehenden derselben Classe hergeleitet werden. Beide sind leicht und bequem in der Ausübung, aber dennoch die erste verhältnißmässig leichter als die andere, die dagegen darin von grösserm Umfange ist, daß sie unmittelbar jede Classe unabhängig von der nächst vorhergehenden darstellen lernt, da bey jener die spätern Classen von den frühern abhängig sind, selbige also dann von vorzüglichem Nutzen ist, wenn man alle Classen nach der Ordnung braucht.

Die Bedingung nun, welche, so lange man nichts anders erinnert, durchgängig befolgt wird, daß, bey diesen beiden Problemen, so wie bey andern combinatorischen Entwickelungen oder Zusammensetzungen nach Zahlen aus Ziffern, alles nach gutgeordneten Complexionen und Classen ausgeführt wird, macht das Verfahren dafür leicht und

werden

werden dabey folgende, für alle Zahlensysteme wahre Sätze, vorausgesezt:

1) Eine Zahl wird erhöht, wenn irgend eine ihrer Ziffern erhöht wird; sie wird um so grösser, je beträchtlicher die Erhöhung und je höher die Stelle ist, in welcher die Ziffer erhöht wird.

2) Wenn man eine Ziffer einer Zahl um Eins erhöht, die Ziffern linker Hand (die höhern) ungeändert läßt, in die Stellen rechter Hand (die niedrigern) aber, lauter kleinste Ziffern des Systems sezt, so ist die so veränderte Zahl grösser, als wenn man die Ziffer ungeändert beybehalten, aber nach ihr zur Rechten, lauter größte Ziffern des Systems gesezt hätte.

3) Die kleinste Zahl aus gegebenen Ziffern zu schreiben, muß man die kleinsten Ziffern in die höchsten, die größten Ziffern in die niedrigsten Stellen setzen; die größte Zahl aus gegebenen Ziffern zu schreiben, verfährt man gerade umgekehrt, sezt die größten Ziffern in die höchsten, die kleinsten in die niedrigsten Stellen.

4) Sollen die Ziffern jeder Complexion zusammen (wie hier bey beiden Discerptionsproblemen erfordert wird) immer eine bestimmte Summe geben, so kann man keine höhere Ziffer einer Complexion erhöhen, ohne daß das auf eine oder mehrere niedriger Ziffern einen Einfluß hat. Die Regel der Entwickelung muß nun die Stelle der zu erhöhenden Ziffer, und was das für einen Einfluß auf die folgenden niedrigern Ziffern habe, bestimmen.

Das führt unmittelbar auf die Forderung oder Aufgabe: 1) Aus einer gegebenen Complexion irgend einer Classe, die nächstfolgende Complexion; und 2) aus der ersten Complexion irgend einer Classe die folgende und alle übrigen (vermöge 1.) derselben Classe, gutgeordnet, zu schreiben. Beide Aufgaben können sich auf Combinationen und Variationen überhaupt oder zu bestimmten Summen

beziehen.

beziehen. Hier kann nur, da Herr Fischer die erstern gar nicht zu kennen scheint, von den leztern die Rede seyn, die er allein braucht und anwendet.

Ich will, weil Herr Fischer blos Beyspiele, und in Absicht auf Variationen nur sehr wenige und nicht weit ausreichende, gegeben hat, die beiden Hindenburgischen Discerptionsregeln für einzelne Classen, zu bestimmten Summen, wie solche aus den (Inf. Dign. p. 80. 81. no. 5. und p. 134. no. 8.) von ihm gegebenen Vorschriften fliessen, und wie er sie izt vorzutragen pflegt, mittheilen, und mit den Variationsdiscerptionen den Anfang machen.

A) Variationen für Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen aus den Elementen 1, 2, 3, 4... [uu])

Aufgabe I. Aus einer gegebenen Variationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung. 1) Ist die lezte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion grösser als 1, so ziehe man 1 von ihr ab und addire 1 zur folgenden Ziffer. Die beiden so veränderten Ziffern in ihren Stellen, mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächst höhere Complexion.

So folgen $1, 1, \dot{1}, \dot{4}$ und $1, 1, \dot{2}, \dot{3}$ und $1, 1, \dot{3}, \dot{2}$ und $1, 1, 4, 1$ auf einander; aus jeder vorhergehenden Complexion, die nächstfolgende höhere.

2) Ist die lezte Ziffer der gegebenen Complexion 1, oder sind mehrere Ziffern derselben nebst der lezten, hintereinander

uu) Man muß hier und in der Folge die Reihe 1, 2, 3, 4... von der 1, 2, 3,...m wohl unterscheiden, weil die leztere auf ein bestimmtes Zahlensystem sich bezieht, dessen höchste Ziffer m ist. Die Punkte über einigen Ziffern hier und in der Folge zeigen die Ziffern an, bey denen die Regel ihre Anwendung findet, und sind so nüzliche Nachweisungen.

einander 1, daß also die Complexion sich mit 1 oder 11 oder 111 oder 1111 u. s. w. endiget: so erhöhe man die nächste zweyte Ziffer von der 1 in der höchsten Stelle, vorwärts, lasse die Ziffern neben der Erhöheten linker Hand (wenn es noch dergleichen giebt) unverändert, in die Stellen aber rechter Hand derselben setze man durchgehends 1, bis in die lezte Stelle, in die man das Complement zur gegebenen Summe sezt, das auch 1 seyn kann.

Auf 1141 folgt 1213; auf 12311 folgt 13112; auf 512111 folgt 521111, und daraus 611111.

3) Giebt es aber keine nächste zweyte Ziffer vorwärts von der 1, (wie sie 2 bestimmt) so ist die gegebene Complexion die lezte ihrer Classe.

So ist in 611111 die Ziffer 6, die erste nach 1, zugleich in der höchsten Stelle, nach welcher es also keine höhere, und folglich auch keine zweyte Ziffer vorwärts von 1 geben kann. Die gegebene Complexion 611111 ist also die höchste und lezte ihrer Classe.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, findet man, wenn man (k—1) Einheiten neben einander schreibt und in die lezte oder niedrigste Stelle das Complement n+1—k zur Summe n sezt. Für k=n ist dies Complement selbst 1, und es giebt nur eine, aus lauter Einsen bestehende Complexion dieser Classe, die zugleich die lezte Classe von allen ist.

Daraus fließt unmittelbar folgende

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer verlangten Variationsclasse k, gutgeordnet, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach vorigem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die höhern Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2.) der Auflösung der vorigen Auf-

gabe

gabe I. bis man (nach 3.) auf die höchste und lezte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beiden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nemlich die in 1 und 2 festgesezten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches bey grossen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Exempel. Für $n = 7$ und $k = 5$. Oder: die Variationscomplexionen für ${}^{7}E_{(1,2,3,4\ldots)^{5}}$ zu schreiben.

Diese sind, nach obigem Verfahren:

11113	11311	21112
11122	12112	21121
11131	12121	21211
11212	12211	22111
11221	13111	31111

Anmerkung. Hier ist 31111 die lezte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe 7, weil es hier keine zweyte Ziffer nach der (hier punktirten) höchsten 1 giebt. (Aufg. I. 3.) Würde man aber statt 31111 schreiben 031111, so könnte man die Regel (2.) wieder anwenden, und fände so 111112, die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der lezten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe; aus welcher man, wie vorher, die folgenden derselben Classe weiter ableiten kann.

Einen solchen Uebergang nennt Herr Hindenburg deductionem ex Classe in Classem. Er findet auch, in seiner Art, bey der in natürlicher Ordnung, nach welchem Zahlensystem man will, geschriebenen Zahlenreihe statt, wenn man

man von m ziffrigen Zahlen zu den (m+1) ziffrigen fortschreitet vv).

B) Combinatorische Zusammensetzung für Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5....

Aufgabe I. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung. 1) Ist die lezte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion um mehr als 1 grösser als die nächstfolgende, so ziehe man 1 von der lezten Ziffer ab, und addire 1 zur vorlezten Ziffer. Die beiden so veränderten Ziffern in ihren Stellen, mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächsthöhere Complexion.

So folgen 11137 und 11146 und 11155; ingleichen 11227 und 11236 und 11245 auf einander; aus jeder vorhergehenden Complexion, die nächstfolgende höhere.

2) Ist die lezte Ziffer der gegebenen Complexion gleich groß oder nur um 1 grösser, als die vorlezte, so gehe man weiter zu den nächstfolgenden Ziffern fort, und suche die erste Ziffer unter ihnen, die um mehr als 1 kleiner ist als die lezte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der Erhöheten linker Hand (wenn es noch dergleichen giebt) unverändert, in die Stellen aber rechter Hand der Erhöheten, setze man lauter (wie sie die Erhöhung gegeben) gleiche Ziffern, bis auf die lezte oder niedrigste Stelle, in die man das Complement zur gege-

vv) So giebt z. B. im dekadischen System die höchste m ziffrige Zahl $\overset{m-1}{9\,9\,9\ldots}$ wenn man dafür schreibt $\overset{m}{0999\ldots}$ die höchste (m+1) ziffrige Zahl $\overset{m}{1000\ldots}$

gegebenen Summme sezt, das grösser oder gleich groß mit der vorlezten Ziffer seyn, nie aber kleiner werden kann.

Auf 12244 folgt 12334, darauf 13333, und darauf 22225; auf 22234 folgt 22333.

3) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist als die lezte, so ist sie die lezte und höchste Complexion ihrer Classe.

Dies ist der Fall bey der vorigen lezten Complexion 22333, nach welcher also keine weiter in der Classe, zu welcher sie gehört, folgen kann.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, ist mit der ersten Complexion für Variationen, für einerley n und k, vollkommen gleich, und wird also eben so (wie in dem obigen Zusatze bey A.) bestimmt. Für k = n giebt es auch hier nur eine einzige aus lauter Einsen bestehende Complexion der lezten Classe.

Daraus fließt unmittelbar folgende

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer angegebenen Combinationsclasse k, gutgeordnet, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach vorhergehendem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höhern Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2.) der Auflösung der vorstehenden Aufgabe I. bis man (nach 3.) auf die höchste und lezte Complexion der gegebenen Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beiden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nemlich die in 1. und 2. festgesezten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches

bey grossen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Exempel. Für n=13 und k=5; oder: die Complexionen für ${}^{13}E_{(1,2,3,4\ldots)}$ zu schreiben.

Diese sind, nach obiger Vorschrift:

11119	11236	12244
11128	11245	12334
11137	11335	13333
11146	11344	22225
11155	12226	22234
11227	12235	22333

Anmerkung 1. Hier ist 22333 die lezte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe 13, weil es in ihr keine Ziffer giebt, die um mehr als 1 kleiner ist, als die lezte Ziffer 3. Würde man aber statt 22333 schreiben 022333, so könnte man die Regel (2) wieder anwenden, und fände so 111118 die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der lezten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe. Eine deductio ex Classe in Classem, wie die obige.

Anmerk. 2. Herr Professor Fischer hat (§. 52.) dieselben Zerfällungen der Zahl 13 in 5 Theile aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.... aufgestellt, aber nicht angegeben, wie man sie finden soll, um keine zu verfehlen. Die Bedingung, die Entwickelung nach gutgeordneten Complexionen und Classen vorzunehmen, macht hier alles leicht, und ist um so mehr wichtig, je grösser die Zahlen sind. Herr Fischer braucht aber dort nur diejenigen Zerfällungen der Zahl 13 in 5 Theile, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, und nur diesen allein, (keinen grössern) schreiben lassen. Von den 18 von ihm dargestellten Complexionen sind also dort nur 6 brauch-

brauchbar, die übrigen 12 sind umsonst gesucht. Herr Hindenburg unterscheidet in solchen Fällen Complexiones vtiles und inutiles ww).

Wie dergleichen Complexionen, unabhängig von den übrigen, die man nicht braucht, sich finden lassen, wird folgendes zeigen.

C) Entwickelung der Zahlencomplexionen in B, wenn statt der dortigen unbestimmten Elementenreihe 1, 2, 3, 4, 5 ... eine bestimmte 1, 2, 3 .... r ... m − 1, m gegeben ist; wo r jedes Element $< m - 1$ bedeutet, und das höchste Element $m < n + 1 - k$ seyn soll.

Aufgabe I. Die erste Complexion zur Summe n für die Combinationsclasse k, aus den Elementen 1, 2, 3 .... r .... m − 1, m zu finden; wenn $m < n + 1 - k$.

Auflösung. Man nehme $n - k = R$, so ist entweder

1) der Rest $R = r$, eine kleinere Zahl als $m - 1$,

2) oder es ist $R = q\,(m - 1)$, ein Vielfaches von $m - 1$,

3) oder es ist $R = q\,(m - 1) + r$, ein Vielfaches von $m - 1$, und eine kleinere Zahl.

Für 1) setze man in die lezte oder niedrigste Stelle der zu bestimmenden Complexion die Zahl $1 + r$ und in die übrigen ($k - 1$ Stellen, lauter Einsen.

Für 2) setze man das höchste Element m von der lezten Stelle an, so oft neben einander, als q Einheiten hat. Werden dadurch noch nicht alle Stellen besezt: so fülle man die übrigen mit Einsen aus.

Für 3) setze man eben so das Element m von der lezten Stelle an qmal hinter einander, schreibe dann die Zahl $1 + r$ daneben,

ww) Nov. Syst. Comb. p. X. 27.

daneben, und fülle, wenn noch leere Stellen vorhanden sind, die übrigen mit Einsen aus.

Zusatz. Soll die Aufgabe möglich seyn: so darf n nicht kleiner als k, aber auch nicht grösser als mk seyn. Denn für $n=k$ bestände die Complexion aus lauter Einsen, als kleinsten, für $n=mk$ aus lauter m, als größten Elementen. Dies gäbe also die kleinste und größte Complexion von allen, die sich aus k Zahlen der Reihe 1, 2, 3 ... m schreiben lassen, als Gränzen der übrigen dazwischenfallenden.

Exempel. Für 1, 2, 3, 4, 5, 6 (wo also $m=6$) soll man die erste Complexion in der Classe $k=8$ suchen; und zwar

1) zur Summe $n=11$.

Hier wäre $11-8=R=3$. Da nun $3<5$, so ist die gesuchte Complexion 11111114.

2) Zur Summe $n=28$.

Hier wäre $28-8=R=20$. Da nun $m-1=5$, so ist 20. d. i. $q(m-1)=4.5$. also $q=4$. und die erste Complexion ist 11116666.

3) Zur Summe $n=40$.

Hier wäre $40-8=R=32$. Da nun $m-1=5$, so ist 32. d. i. $q(m-1)+r=6 5+2$, also $q=6$ und $r=2$. Also ist $1+r=3$, und die erste Complexion 13666666.

4) Die möglichst kleinste Complexion wäre 11111111, für $n=k=8$.

Die möglichst größte Complexion wäre 66666666, für $n=mk=48$.

Dies wären also die Gränzen der möglichen Complexionen von beiden Seiten.

Aufgabe II. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben. Die Reihe sey wieder 1, 2, 3 .... m, wie sie Aufgabe I. bestimmt.

Auflö-

Auflösung. 1) Man suche, von der lezten oder niedrigsten Stelle der gegebenen Complexion vorwärts gehend, die erste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die lezte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der Erhöheten linker Hand, wenn es noch dergleichen giebt, unverändert, in die übrigen Stellen aber, rechter Hand der Erhöheten, setze man (wie sie die Erhöhung gegeben hat) lauter gleiche Ziffern.

2) Betragen die Ziffern der so (nach 1.) bestimmten Complexion in ihrer Summe so viel, als die Summe n der gegebenen Complexion, so hat man die verlangte nächstfolgende Complexion gefunden.

12224 giebt 12233; und 2334 giebt 3333.

3) Geben die Ziffern (nach 1.) in ihrer Summe weniger als n, so vertheile man den Rest auf die lezte und folgenden Ziffern vorwärts, so weit er zureicht, dergestalt, daß die niedrigern Stellen zuerst mit den höhern Ziffern versehen werden; welches geschiehet, wenn man von dem Reste zu den Ziffern der niedrigsten und successive höhern Stellen nach und nach so viel addirt, als nur immer geschehen kann, um die höchsten Ziffern der Reihe zu erreichen, ohne die Summe n zu übersteigen.

So gäbe die Complexion 155556, nach den verschiedenen Werthen für m, folgende nächsthöhere Complexionen.

222222	222222	222222	ꝛc.
3444	555	366	
225666	222777	222588	ꝛc.
für m=6	für m=7	für m=8	ꝛc.

4) Hat die gegebene Complexion mehrere größte Ziffern der Reihe von der lezten Stelle an hintereinander, so kann man, als eine Abkürzung, (denn sonst gelten auch hier die gegebenen Vorschriften 1, 2, 3, wie in andern Fällen) hier die erste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die

höchste

höchste der größten Ziffern, suchen, und die durch die Erhöhung der gefundenen kleinern bestimmten gleichen Ziffern nur bis in diese höchste Stelle schreiben, und weiter mit diesen nach 1 bis 3 verfahren; wobey also die übrigen, nach der höchsten größten weiter folgenden Ziffern, bis in die lezte Stelle, unverändert bleiben, eben so wie die über der Erhöheten vorwärts liegenden Ziffern.

So giebt die Complexion 225666

(nach No. 4.)	(nach No. 3.)
233366	233333
13	1333
234666	234666

für einerley Werth von $m = 6$, wie sich von selbst versteht, dieselbe nächstfolgende Complexion.

5) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die lezte, so ist sie die lezte und höchste Complexion ihrer Classe,

wie 233; 3344; 44455; u. s. w.

Aus I. und II. fließt sogleich die

Aufgabe III. Alle Complexionen zur Summe n für die Combinationsclasse k, gut geordnet, aus den Elementen 1 2 3 .... m, wenn $m < n + 1 - k$, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach der Aufgabe I.) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höhern Complexionen folgere man durch Anwendung von (1 bis 4.) der Auflösung der Aufgabe II. bis man (nach 5.) auf die höchste und lezte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Man kann, wenn n keine grosse Zahl ist, was man (nach 3. und 4. der Auflösung in Aufgabe II.) zu addiren hat, leicht übersehen, ohne erst die Zahlen unter die zugehörigen Ziffern unterzusetzen, welches das Verfahren abkürzt und erleichtert.

Exem-

Exempel. Man soll die Complexionen für

$$\overset{13}{E}\ (1\ 2\ 3\ 4)$$

suchen; wo also n = 13; k = 5 und m = 4. Diese sind, nach obigen Vorschriften, folgende sechs:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \dot{1} & 3 & \dot{4} & 4 \\ 1 & 2 & \dot{2} & \dot{4} & 4 \\ 1 & \dot{2} & 3 & 3 & \dot{4} \\ \dot{1} & 3 & 3 & 3 & \dot{3} \\ 2 & 2 & \dot{2} & 3 & \dot{4} \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Die Punctirung für die erste und zweyte Complexion, die mehr als eine größte Ziffer, nemlich 4, am Ende haben, ist nach Auflösung für Aufgabe II. 4. die Punctirung der übrigen vier Complexionen aber, nach Auflösung für Aufgabe II. 3. geschehen.

Die Complexionen im vorstehenden Exempel sind auf dem kürzesten Wege, und unabhängig von den oben (B) gesuchten, gefunden worden, welches ungleich kürzer und bequemer ist, als was Herr Fischer gethan hat, der (§. 52.) die Complexionen, wie sie die unbestimmte Reihe 1, 2, 3, 4... giebt, (B. Aufgabe II.) entwickelt, und daraus die zur bestimmten Reihe 1 2 3 4 gehörigen ausgelesen hat. Die Menge beider ist um so mehr von einander verschieden, je grösser n und je kleiner m ist. Für n = 15, k = 5, und m = 4, müßte man schon 30 Complexionen darstellen, um daraus die 5 brauchbaren, 12444; 13344; 22344; 23334; 33333; auszulesen; und so ungleich mehrere für grössere Unterschiede von n und m xx).

Hier

xx) Es kann Herrn Fischer nicht zur Entschuldigung gereichen, daß Herr Hindenburg (Inf. Dign. p. 94. 95. in Beziehung auf p. 85. 86.) sich auf eine ähnliche Art verhalten hat. Denn die Sache

Hier zeigt sich zugleich der Unterschied beider Ausdrücke

$$\overset{13}{E}(1,2,3,4\ldots) \text{ und } \overset{13}{E}(1,2,3,4)$$

sehr deutlich, und wie sie von

$$\overset{e\,13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ a & b & c & d\ldots\end{pmatrix} \text{ und } \overset{e\,13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$$

verschieden sind. Herr Fischer, der mit seiner Zeichnung überall sehr weit hinter der Hindenburgischen zurückbleibt, hat für die beiden ersten Ausdrücke gar keine, für die beiden lezten aber fehlerhafte yy) und in keinem Falle so darstellende Zeichen, wie Herr Hindenburg.

Daß

Sache war dazumal nur eben erfunden, und konnte dieserwegen noch nicht so für die speciellen Fälle bearbeitet seyn, wie nachher geschehen. Und dennoch wird dort p. 87. schon von regulis specialibus gesprochen, und dabey bemerkt: reperitur in eo (adhibitis nimirum eiusmodi regulis) magnum saepe temporis et laboris compendium, praesertim in numeris paulo maioribus, quorum est multitudo Complexionum longe maxima. Herr Fischer, der Herrn Hindenburgs Werke bey Ausarbeitung des seinigen vor sich hatte, konnte doch wohl die Sache für sich berichtigen; und das hier Beygebrachte wird zeigen, wie das hätte geschehen müssen. Aber freylich mußte er dann den Hindenburgischen ähnliche Regeln angeben, auch würde es etwas aufgefallen seyn, den speciellen Fall zu berichtigen, da er von dem allgemeinen, unter dem er steht, nichts gesagt hatte. Und so hat Herr Fischer freylich consequent für sich, aber nicht vortheilhaft für seine Leser, sich dabey verhalten.

yy) Man sehe die Note b. Auch giebt Herr Fischer kein Mittel an, woraus man übersehen kann, (was in vielen Fällen doch so wichtig und nothwendig ist) wie viel es dergleichen Zerfällungen oder Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen, für die einzelnen Classen sowohl als für alle Classen zusammen auf einmal gebe? Dahin gehört die Hindenburgische Tab. VII. die Infin. Dign. p. 170. 171. nach Herrn Eulern mitgetheilt wird.

Daß die Aufgabe über die Complexionen zu bestimmten Summen, aus der Reihe der Zahlen in natürlicher Ordnung von 1 an, in B und C, vollständig gelößt sey, erhellet folgendergestalt. Die höchste Zahl, die in den Complexionen der Classe k vorkommen kann, ist $n+1-k$. Reihen also, die auch grössere Zahlen enthalten, wie die unbestimmt fortgehende 1, 2, 3.... oder jede andere, deren Endzahl $m > n+1-k$ wäre, sind mit der, deren Endzahl $n+1-k$ ist, in so fern gleichgültig, weil von den grössern Zahlen jener Reihen in den Complexionen der Classe k keine vorkommt. Dahin gehen die Vorschriften in B. Ist aber die bestimmte Reihe 1, 2, 3....m, und $m < n+1-k$ gegeben: so kommen immer weniger und weniger Complexionen in die Classe k, je kleiner m ist. Dahin gehen die Vorschriften in C.

Auch erhellet zugleich, warum Herr Hindenburg für die Auflösung der Aufgabe, wo er alle mögliche Complexionen aller Classen mit einander zu finden anweiset, die Reihe 1, 2, 3, 4....n annimmt. Denn in der ersten Classe kommt n selbst, in der zweyten $n-1$, in der dritten $n-2$ u. s. w. als höchstes Element vor, und die nte oder lezte Classe besteht aus lauter Einsen.

Eben so hat Herr Hindenburg auch die Variationscomplexionen in A auf eine bestimmte Reihe 1, 2, 3, 4....m bezogen. Da aber Herr Fischer gar keine Anwendung von dergleichen beschränkten Variationscomplexionen macht, so habe ich die Regeln ihrer Darstellung hier beyzubringen für überflüssig gehalten, so wie überhaupt die Anwendung auf die allgemeine Progression a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ rc. wo das Verfahren dafür dieselben, nur allgemeiner ausgedrückten, Vorschriften befolgt.

Das mag genug seyn, um zu zeigen, was Herr Fischer hätte thun sollen, und wie groß die Lücke ist, die er offen gelassen hat. Wenn auch schon die Regeln, der hier in A, B

und

und C vorgetragenen Aufgaben, in der Anwendung nicht schwer zu befolgen sind, so muß man sie doch, um sie sicher und ohne Gefahr zu fehlen, anwenden zu können, nach ihrem ganzen Umfange und mit der nöthigen Präcision dem Leser vorlegen. Man wird diese Vorschriften überall mit Nutzen befolgen, wo man die Complexionen einzelner Classen braucht. Da aber, wo man alle Classen haben muß, sind jene andern Hindenburgischen Regeln, nach denen man Complexionen folgender Classen aus Complexionen nächstvorhergehender bestimmt, doch noch leichter. Denn diese setzen blos die successive Zerfällung einer gegebenen Zahl in zwey Theile voraus; wobey also alle vorgängige Vergleichung der Ziffern oder Zahlen, einzelner Complexionen, alles Aufmerken auf ein Complement aus mehrern Ziffern oder einen Rest, ganz wegfällt; wie bey den hier vorgetragenen Auflösungen der Aufgaben in A, B, C, zuweilen nöthig ist.

Dieses, und ähnliche combinatorische Verfahren, die nach den Hindenburgischen Vorschriften, die gemeinen arithmetischen Operationen an Leichtigkeit noch übertreffen, sind in der combinatorischen Analytik Hülfsmittel geworden, die größten Schwierigkeiten zu übersteigen, und den Erfolg der verwickeltsten Substitutionen zu übersehen, die auf keinem andern Wege zu bewältigen waren, und welche auch der entschlossenste Rechner aufzugeben sich oft genöthiget sahe.

Und diese Hülfsmittel, nebst den darauf sich stützenden Methoden und Formeln, die Herr Prof. Hindenburg 13 Jahre vor Herausgabe des Fischerischen Werks deutlich beschrieben und ausführlich angewendet hat, nennt gleichwohl Herr Fischer (ohne einmal die Hauptsache dabey auseinander zu setzen) auf allen Seiten die seinigen! Kann man die Dreistigkeit in Anmassung fremden Eigenthums weiter treiben?

X. Herr

X.

Herr Fischer hat mit den entlehnten Hülfsmitteln nichts neues geschaft. Die von ihm aufgestellten Haupt- und Grundformeln für die Potenzen des Infinitinomiums sind mit den Hindenburgischen vollkommen identisch, wie die Confrontation der Fischerischen Formeln gegen die Hindenburgischen evident darthut.

So auffallend aber die stillschweigende Entlehnung fremder Hülfsmittel, der combinatorischen Zerfällung der Zahlen zu bestimmten Summen und Classen, so wie der darauf sich beziehenden Combinationszeichen, auch immer seyn mag: eben so, und noch mehr befremdend, ist die Art, wie Herr Fischer Gebrauch davon gemacht hat. Vielleicht, wird man denken, hat er sich der fremden Werkzeuge glücklicher, als ihr Erfinder selbst, bedient, auch wohl noch etwas von seiner Erfindung hinzugesezt, und sich dadurch ein eigenes Verdienst um die Sache erworben, vielleicht hat er die vorgefundenen, diese combinatorischen Zeichen enthaltenden Haupt- und Grundformeln, deren mannigfaltige Anwendungen so unerwartete Aufschlüsse und Resultate gegeben, verbessert, in ihrem Ausdrucke verkürzt, in ihrem Umfange erweitert, zur Anwendung bequemer eingerichtet, durch neue hinzugesezte noch vermehrt. — Auch sind die Leser zu einer solchen Erwartung durch die so oft wiederholte und beharrliche Behauptung, daß alles das seinige sey, vollkommen berechtiget. Aber von allem diesen findet sich auch nicht die geringste Spur in dem Fischerischen Werke. So wie Herr Fischer die ersten Hülfsmittel selbst und ihre Zeichen entlehnt, aber leztere, um sie unkenntlicher zu machen, im

im Aeusserlichen etwas abgeändert hat: so hat er auch dieselben und auf dieselbe Art ausgedrückten Haupt- und Grundformeln daraus hergeleitet; nur aber den Zusammenhang der Gründe mit dem, was daraus gefolgert worden, durch Verdeckung des Combinationsquells (an dessen Stelle er seine sehr beschränkte Theorie der Dimensionszeichen gesezt hat) verdunkelt, und noch manches dabey unerörtert zurückgelassen.

Die justificirenden Belege dieser Behauptung, die sogleich gegeben werden sollen, gehörig zu verstehen, muß man sich der Fischerischen Dimensionszeichen (römische Zahlen und grosse deutsche Buchstaben) und ihrer Relationen zu den Hindenburgischen Combinationszeichen (grosse lateinische mit beygefügten kleinen deutschen Buchstaben) erinnern, (S. 56.) nach welchen, wenn die Dimensionszeichen vom erstern Gliede anfangen,

$$\overset{r}{\mathrm{I}} = a^r A; \quad \overset{r}{\mathrm{II}} = b^r B; \quad \overset{r}{\mathrm{III}} = c^r C \ldots\ldots \overset{r}{\mathrm{N}} = n^r N$$

und, wenn sie vom zweyten Gliede anfangen,

$$\overset{r}{\mathfrak{A}} = a^{r-1} A; \; \overset{r}{\mathfrak{B}} = b^{r-2} B; \; \overset{r}{\mathfrak{C}} = {}^{r-3} C \ldots \overset{r}{\mathfrak{N}} = n^{r-n} N$$

und beiderley Zeichen sich deutlich von einander unterscheiden.

Da die Anwendung der Hindenburgischen Combinationsmethode auf die Analysis ungleich weiter, als die der Fischerischen Theorie der Dimensionszeichen sich erstreckt, welche leztere nur auf ein einziges aber vielumfassendes Problem jener Methode zz) sich beziehet: so kann auch nur so viel aus den Hindenburgischen Schriften, als zur Vergleichung nöthig ist, hier beygebracht werden.

Herr Hindenburg trägt zuerst das ofterwähnte combinatorische Problem mit Beyfügung der dahin gehörigen Zeichen (Infin. Dign. §. XXII.) vor, und macht sogleich (§.

zz) Man sehe die Note gg.

(§. XXIII.) die Anwendung davon auf des Infinitinomiums

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}$$

Dignität ν, unter der Voraussetzung, daß der Exponent ν eine ganze positive Zahl sey, und bringt mehrere Exempel zur Erläuterung, auch (§. XXIV.) mehrere andere Anwendungen der gefundenen Potenzformel bey. Darauf geht er (§. XXV.) zu des Infinitinomiums

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}$$

Dignität m fort, wo m jede Zahl bedeuten kann, und zeigt am Ende dieses §. No. 5. wie daraus die Dignität

$$(ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + dx^{\mu+3\delta} + \text{etc.})^m$$

folgt; die Dignität nemlich der allgemeinsten Reihe von denen, in welchen die Exponenten von x in arithmetischer Progression fortgehen, und wo μ, δ und m alle Zahlen vorstellen, daß also diese Reihe die beiden vorhergehenden Reihen mit enthält. Die Formeln der Dignitäten dieser allgemein ausgedrückten Reihe sind, ausser den angeführten Orten, auch in Nov. Syst. Comb. p. LIV. und zwar für einen ganzen positiven Exponenten in No 8. für jeden willkührlichen aber in No. 7. angegeben.

Gerade eben so hat auch Herr Fischer, nach Vorausschickung weniger Vorbereitungssätze, seine Dimensionszeichen und ihren Gebrauch für zwey, drey und mehrere Factoren zu bestimmten Marken oder Summen (im 2ten Abschnitte) erklärt, und geht von da (im 3ten Abschnitte) zur Erhebung des vielgliedrigen Ausdrucks oder Polynomiums

$$Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + \text{etc.}$$

zu jeder Potenz, deren Exponent eine ganze und positive Zahl ist, fort, und bringt mehrere Beyspiele zur Erläuterung bey. Unmittelbar darauf folgt (im 4ten Abschnitte §. 67.) die Erhebung des polynomischen Ausdrucks

$$1 + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + \text{etc.}$$

zu jeder Potenz von unbestimmten Exponenten, und zulezt (§. 70.) des allgemeinern polynomischen Ausdrucks

$$Ax^{m} + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + \text{rc.}$$

Erhebung zur Potenz n, was auch n für eine Zahl seyn mag, mit beygefügten mehrern Beyspielen zur Erläuterung und Anwendung.

Gang und Anordnung sind bey den beiden Verfassern dieselben, und so sind es auch die Formeln für die Potenzen, die wesentlich nicht im geringsten von einander verschieden sind, blos im Aeusserlichen, wegen der fehlerhaften Zeichnung der Fischerischen Dimensionszeichen und der ganz willkührlichen seiner Binomialcoefficienten, (man sehe S. 60.) etwas von einander abweichen, wie aus folgender nähern Vergleichung und Nebeneinanderstellung mit mehrern erhellen wird.

A. Potenzen der Reihe

$$y = ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{rc.}$$

wenn der Exponent n eine ganze positive Zahl ist. Nach Fischer (§. 46.) und Hindenburg (Nov. Syst. Comb. p. LIV. 8.)

$$\overset{n}{y} = \begin{cases} \overset{n}{I}Nx^{n\mu} + \overset{n+1}{I}Nx^{n\mu+\delta} + \overset{n+2}{I}Nx^{n\mu+2\delta} + \text{rc.} \\ \mathfrak{n}^{n}Nx^{n\mu} + \mathfrak{n}^{n+1}Nx^{n\mu+\delta} + \mathfrak{n}^{n+2}Nx^{n\mu+2\delta} + \text{rc.} \end{cases}$$

Die Vergleichung für bestimmte Werthe von n sehe man hinten in der Tafel VII. I. A.

Für x = 1, oder für die Reihe

$$y = a + b + c + d + e + \text{rc.}$$

wird

$$\overset{2}{y} = \begin{cases} \overset{2}{II} + \overset{3}{II} + \overset{4}{II} + \overset{5}{II} + \text{rc.} \\ \mathfrak{b}^{2}B + \mathfrak{b}^{3}B + \mathfrak{b}^{4}B + \mathfrak{b}^{5}B + \text{rc.} \end{cases}$$

$$\overset{3}{y} = \begin{cases} \overset{3}{III} + \overset{4}{III} + \overset{5}{III} + \overset{6}{III} + \text{rc.} \\ \mathfrak{c}^{3}C + \mathfrak{c}^{4}C + \mathfrak{c}^{5}C + \mathfrak{c}^{6}C + \text{rc.} \end{cases}$$

y =

$$y^4 = \begin{cases} \overset{4}{IV} + \overset{5}{IV} + \overset{6}{IV} + \overset{7}{IV} + \text{ꝛc.} \\ b^4D + b^5D + b^6D + b^7D + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. (§. 47.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots \\ a & b & c & d \dots \end{pmatrix}$$

B. Potenzen der Reihe

$$y = 1 + bx^r + cx^{2r} + dx^{3r} + ex^{4r} + \text{ꝛc.}$$

deren Exponent m unbestimmt jede Zahl seyn kann. Nach Fischer (§. 67.) und Hindenburg (Inf. Dign. p. 113.)

$$y^m = 1 + \alpha\overset{2}{\mathfrak{A}}x^r + [\alpha\overset{3}{\mathfrak{A}} + \beta\overset{4}{\mathfrak{B}}]\, x^{2r}$$

$$+ [\alpha\overset{4}{\mathfrak{A}} + \beta\overset{5}{\mathfrak{B}} + \gamma\overset{6}{\mathfrak{C}}]\, x^{3r} + \text{ꝛc.}$$

$$y^m = 1 + {}^m\mathfrak{A}a^1Ax^r + [{}^m\mathfrak{A}a^2A + {}^m\mathfrak{B}b^2B]\, x^{2r}$$

$$+ [{}^m\mathfrak{A}a^3A + {}^m\mathfrak{B}b^3B + {}^m\mathfrak{C}c^3C]\, x^{3r} + \text{ꝛc.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \\ b & c & d & e & f \dots \end{pmatrix}$$

C. Potenzen des allgemeinen polynomischen Ausdrucks

$$y = ax^\mu + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + dx^{\mu+3\delta} + \text{ꝛc.}$$

deren Exponent m unbestimmt jede Zahl bedeuten kann. Nach Fischer (§. 70.) und Hindenburg (Nov. Syst. Comb. p. LIV. 7.)

$$y^m = a^m x^{m\mu}$$

$$+ \alpha a^{m-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m\mu+\delta}$$

$$+ [\alpha a^{m-1}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \beta a^{m-2}\overset{4}{\mathfrak{B}}]\, x^{m\mu+2\delta}$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. S. hier Tafel VII. B.

$$y^m = a^m x^{m\mu}$$

$$+ {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}a^1Ax^{m\mu+\delta}$$

$$+ [{}^m\mathfrak{A}a^{m-1}a^2A + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2B]\, x^{m\mu+2\delta}$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. S. hier Tafel VII. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots \\ b & c & d & e \dots \end{pmatrix}$$

Setzt

Sezt man auch hier $x = 1$, so findet man sogleich daraus die Potenz des unbestimmten Exponentens m der Reihe

$$y = a + b + c + d + e + \text{ꝛc.}$$

Andere Formeln der Potenzen dieser Reihe, die bey Herrn Fischer nicht vorkommen, stehen hier Tafel VII. II. und III. Herrn Fischers beschränkte Theorie der Dimensionszeichen (die nichts von Complexionibus simpliciter weiß, so wichtig sie auch für die Analysis sind) hat ihn nicht darauf geführt, (in der combinatorischen Analytik kann man sie nicht verfehlen) obschon eine sehr natürliche Veranlassung dazu in einem Beyspiele sich zeigte, die aber, wie man bald sehen wird, Herr Fischer ganz verkannt hat.

Die hier in A, B, C und in Tafel VII. aufgeführte unmittelbare Nebeneinanderstellung der Fischerischen und Hindenburgischen Potenzformeln, thut beider Identität unwidersprechlich dar, und der flüchtigste Ueberblick zeigt sogleich, daß diese Formeln, nicht etwa blos ihren Werthen, sondern allen ihren Theilen und dieser Theile Stellung und Anordnung nach, Glied vor Glied, mit einander übereinkommen.

Wenn nun aber diese von Herrn Hindenburg so eingerichteten Potenzformeln, mit ihren combinatorischen Entwickelungen, die Grundlage des ganzen Fischerischen Werks ausmachen, indem auch die von Herrn Fischer so gerühmte allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen sich darauf stüzt, und nur durch sie zu einer brauchbaren Anwendung hat gebracht werden können; wenn ferner die von Herrn Fischer beygebrachte Formel dieser allgemeinen Auflösungsmethode, eben so, wie die Potenzformeln, blos entlehnt, und aus einem fremden Boden von Herrn Fischer in sein Werk verpflanzt worden ist; wenn endlich Herr Fischer auch diese Formel, so wie die übrigen, für seine Erfindung ausgiebt, so wächst das Erstaunen, wenn man

der-

dergleichen zuversichtliche Aeusserungen und Behauptungen liest, zu einem solchen Grade, daß man kaum seinen eigenen Augen traut, und nicht weiß, was man davon denken und sagen soll!

XI.

Herrn Fischers allgemeine Auflösungsreihe ist, sowohl ihrem Ursprunge als ihrer Form nach, mit der allgemeinen Umkehrungsreihe einerley. Der Unterschied, wenn man sich einen verstatten will, liegt in der Anwendung. Ueber Herrn de la Grange's allgemeine Auflösungsformel, und in wie fern sie von Herrn Fischers Umkehrungsformel äusserlich verschieden, wesentlich aber mit ihr einerley sey. Besonders merkwürdige Erscheinung bey Herrn de la Grange's Entwickelung gebrochener Functionen in unendliche Reihen.

Die Richtigkeit des Fischerischen Vorgebens, als sey die Erfindung seiner Dimensionszeichen durch seine Untersuchungen über eine allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen veranlaßt worden, habe ich bereits oben (Seite 14 bis 17.) unwidersprechlich dargethan. Hier ist nun der Ort, die so oft und so sehr gerühmte Auflösungsmethode, wie solche Herr Fischer im 5ten Abschnitte des ersten Theils seines Werks beschrieben, und die dafür angegebene Auflösungsreihe, wie er sie (§. 94 und Tafel III.) gefunden und dargestellt hat, etwas genauer zu beleuchten.

Herr Fischer spricht in der Vorrede von dem so oft gefühlten Bedürfnisse einer allgemeinen Auflösungsmethode, von seiner dafür gefundenen allgemeinen Auflösungsreihe, und nennt (§. 99.) dieses Problem das wichtigste in seinem Werke, und gewissermassen in der ganzen Analysis. Von einem solchen Problem, einer solchen Methode und einer solchen Reihe, ist freylich bisher in der combinatorischen Analytik nicht die Rede gewesen. Es würde ihr also, wenn sie diese Lücke wirklich hätte, von dieser Seite etwas sehr Wichtiges abgehen, welches der Theorie der Dimensionszeichen, durch deren vortheilhafte Bezeichnungsart die Auflösung dieses Problems zu Stande gekommen seyn soll, (Vorrede S. III. und §. 94. S. 70.) offenbar einen grossen Vorzug vor der combinatorischen Analytik geben würde. Aber auf blosse Worte kommt, wie jeder weiß, gar nichts an, und weiter giebt es hier keinen Unterschied. Denn §. 94. wo die Auflösung jenes grossen Problems vorgetragen wird, heißt es in dem dortigen Satze: „Aus dem allgemeinen „Schema $y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} +$ rc. „den Werth irgend einer Potenz von x, nemlich x^t, (was „auch t bedeuten mag) durch eine unendliche, nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, auszudrücken;" und so erhellet denn daraus auf einmal, daß dieses so wichtige Fischerische Problem kein anderes ist, als was man vorlängst unter dem Namen der Umkehrung der Reihen (Serierum Reversio) gekannt hat; wie denn auch die Formel der dortigen Auflösung, mit einer andern von Herrn Magister Eschenbach, drey volle Jahre vor der Herausgabe des Fischerischen Werks bekannt gemachten, ganz leichten und geschmeidigen Umkehrungsformel, vollkommen übereinstimmt, bis auf den Namen, den Herr Fischer (nach §. 99. 2.) in allgemeine Auflösungsreihe umgeändert hat. Daß Herr de la Grange, seinen in Herrn Fischers Vorrede angeführten Aufsatz, Nouvelle *méthode* pour resoudre

dre les Equations littérales par le moyen des Séries überschrieben hat [ab]), kann Herrn Fischer nicht weiter zu einer ähnlichen Benennung berechtigen; denn im gedachten Memoire handelt dieser große Analyst recht eigentlich und einzig von Auflösung der Gleichungen durch Reihen; wozu freylich auch die Umkehrungsformel der Reihen benuzt werden kann, wie schon Herr Hindenburg (Nov. Syst. Comb. p. XXXII.) ausdrücklich erinnert hat: ad Radicum ex aequationibus inventionem vel approximationem, Serierum ducere Inversiones. Aber die Umkehrung der Reihen wird sehr oft und gewöhnlich da gebraucht, wo von Wurzeln der Gleichungen gar nicht die Rede ist. Doch ich will über Worte und Benennungen nicht streiten, weil hier nichts darauf ankommt; wichtiger hingegen ist es zu wissen, daß beiderley Aufgaben von einander nicht wesentlich verschieden sind, daß Herrn Fischers allgemeine Auflösungsreihe (Tafel III f. w.) mit der allgemeinen Umkehrungsreihe (§. 94. S. 68.) einerley, und seine allgemeine Auflösungsmethode, die Wurzeln der Gleichungen durch Reihen auszudrücken, nichts anders, als Anwendung der allgemeinen Umkehrungsformel auf die Gleichungen, nach bestimmten Formen, ist. Herr Fischer sagt zwar, (§. 325.) die Umkehrung der Reihen sey nichts anders als ein besonderer Fall seiner allgemeinen Auflösungsmethode, und könne solche nach seiner allgemeinen Auflösungsreihe in Tafel III. (ganz recht; denn die dortige Reihe ist, wie bereits erinnert worden, mit der Umkehrungsformel §. 94. S. 68. einerley) auf eine völlig directe Art bewerkstelliget werden. Die Sache verhält sich aber gerade umgekehrt. Soll man

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + \text{etc.}$$

 umkeh-

ab) Hist. de l'Acad. Roy. des Sc. et belles lettres à Berl. 1770, p. 251 — 326. Eine Uebersezung davon in Hrn. Prof. Michelsen 3ten Band der Eulerschen Einleitung in die Anal. des Unendlichen, S. 190 — 270.

umkehren, also x (oder x^t) durch Potenzen von y und Coefficienten und Exponenten von x ausdrücken: so geschieht das vermittelst der Formel (§. 94. S. 68. oder Tafel III.) wo man aber nicht vergessen darf, daß Herr Fischer den Coefficienten von x^m der Einheit gleich gesezt hat, (§. 93. S. 67.) daher man nach ihm immer (z. B. in den Exempeln von §. 326 — 333) das erste Glied vorher von seinem Coefficienten befreyen muß. Hat die gegebene Function von x eine endliche Anzahl nach steigender oder fallender Reihe der Exponenten geordneter Glieder, so kann man einen doppelten Ausdruck für x durch Umkehrung suchen. Hiebey wird nur die Lage, nicht aber die gegebene ursprüngliche Form der Glieder geändert; und so kann man, wenn man will, und hat es auch zuweilen gethan, selbst bey Gleichungen, wo x und y vermengt vorkommen, einen solchen Werth für x eine Wurzel, das Verfahren dafür eine Auflösung nennen. Hat man aber statt $y = Ax^m +$ &c. eine bestimmte Gleichung vom Grade n, so würden jene zween Werthe von x hier nicht Genüge thun; denn eine solche Gleichung hat n Wurzeln, und nachdem man diese oder jene Wurzel, und so successive alle suchen will, muß man nicht blos die Lage und Folge der Glieder der gegebenen Gleichung, sondern selbst ihre Form zuvor abändern. Diese vorher zu treffende besondere Einrichtung der Gleichung gehört doch wohl eher zu den besondern Fällen der Methode; worüber Herr de la Grange in dem von Herrn Fischer angeführten Memoire vortrefliche Vorschriften gegeben hat.

Herr Fischer sagt in der Vorrede: was einige der scharfsinnigsten ältern Analysten, Newton und Moivre &c. in Rücksicht einer allgemeinen Auflösungsmethode gefunden hätten, wäre ihm nicht unbekannt gewesen, hätte ihn aber nicht befriediget, da ihre Auflösungen mühsam und zeitraubend, auch nicht allgemein genug wären. Seine neue Bezeichnungsart (die Dimensionszeichen) habe ihn in den

Stand

Stand gesetzt, durch Auflösung dieses Problèms auf die allgemeinste und für die Anwendung bequemste Art, jenes so oft gefühlte Bedürfniß zu befriedigen. Es sey auch vielleicht gut gewesen, daß er damals, als er sich zuerst mit diesem Problem beschäftiget, noch nicht gewußt, daß Herr de la Grange eben dasselbe auf eine höchst scharfsinnige und allgemeine Art aufgelößt habe; er würde vielleicht sich blos damit begnügt haben, die Methode dieses grossen Mannes sich bekannt zu machen, neue Schritte aber, nach einem solchen Vorgänger, nicht versucht, und dadurch die Veranlassung auf seine Dimensionszeichen zu verfallen, verfehlt haben. Da er indessen auf einem ganz anderen Wege, als Herr de la Grange, zu der Auflösung jenes Problems gelanget, und es vortheilhaft sey, wenn ein und derselbe Gegenstand aus verschiedenen Gesichtspuncten betrachtet werde, so wolle auch er die Sache, wie er sie gefunden habe, vorlegen, ob er sich schon statt eines vollständigen Beweises, dergleichen Herr de la Grange für seine Auflösungsreihe in aller Schärfe, deren die Analysis fähig sey, gegeben, nur mit einer unvollständigen Induction habe befriedigen müssen.

Es wird nicht überflüssig seyn, die verschiedenen Gesichtspuncte, aus welchen Herr de la Grange und Herr Fischer die Sache angesehen haben, etwas genauer anzugeben; zu zeigen, was die Formel des Herrn de la Grange sey, und was etwa noch dafür weiter zu thun übrig bleibt, (Herr Fischer nennt das neue Schritte versuchen) um sie für die Anwendung eben so bequem und brauchbar zu machen, als sie in ihrem Ausdrucke einfach und vielumfassend ist; nachzuweisen, aus welchem Gesichtspuncte Herr Fischer das Problem betrachtet hat, und wie er auf diesen Gesichtspunct gekommen ist, woraus zugleich die wahre Ursache erhellen wird, warum es Herr Fischern unmöglich gewesen ist, einen strengen Beweis der allgemeinen Auflösungsreihe,

wie

XII.

Kurze Darstellung dessen, was vor der Ausgabe des Fischerischen Werks über die Aufgabe der Umkehrung der Reihen bekannt gewesen. Herr Fischer ist seinen neuesten Vorgängern bey Behandlung und Auflösung dieses Problems getreulich, Schritt für Schritt, nachgegangen, und hat nicht das Geringste von dem Seinigen hinzugethan. Die Fischerische sogenannte allgemeine Auflösungsformel ist von der Eschenbachischen Umkehrungsformel nur allein dem Namen nach unterschieden, und erstere von lezterer blos übersezt, oder, mutatis mutantis, abgeschrieben.

Herr Fischer ist, wie er auch selbst erinnert, auf einem ganz andern Wege, als Herr de la Grange, zu der Auflösung des Problems über die Umkehrung der Reihen, oder, der allgemeinen Auflösungsmethode, wie er sie nennt, gelangt, hat auch eine von jener ganz verschiedene, sehr einfache, und für die Anwendung auf Umkehrungen noch bequemere Formel aufgestellt. In wie fern aber dieser Weg von ihm zuerst betreten worden, und die mitgetheilte Formel der Umkehrungs- oder Auflösungsformel sein Eigenthum sey, wofür er sie ausgiebt, davon wird man am besten aus Folgendem urtheilen können.

Newtons beide Theoreme über die Umkehrung gh)

von

gh) Newt. Fragm. Epist. ad Oldenb. in Anal. per Quantit. Ser. etc. p. 31.

von $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ rc.
und $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ rc.

sind bekannt. Da er aber den Werth von y nur in 5 Gliedern berechnet, und das Gesetz, das sie befolgen, und wie sie weiter fortgesezt werden können, nicht mit angegeben hat: so ist ihr Gebrauch, noch ausser der Beschränkung, welche die Gestalt der beiden Reihen vorschreibt, in sehr enge Gränzen eingeschlossen. Nachher hat de Moivre ein ausführliches Theorem über die Umkehrung der Reihen

$az + bz^2 + cz^3 +$ rc. $= gy + hy^2 + iy^3$ rc.

bekannt gemacht [hi]) und in einer Formel vorgetragen, auch das sehr zusammengesezte [ik]) Fortschreitungsgesetz der Glieder seiner Formel deutlich, aber nur durch Worte, beschrieben, weil es ihm an schicklichen Zeichen, zur bequemen Darstellung dieses Gesetzes, noch fehlte. Herr von Tempelhof [kl]) hat eine ähnliche Analysis auf die Umkehrung der Reihen

$ay^m + by^{m+1} + cy^{m+2} +$ rc. $= \alpha x^m + \beta x^{m+1} + \gamma^{m+2}$ rc.

ange-

hi) Philos. Transact. Vol. XX. p. 190. und in Moivraei animadv. in Cheyn. Tract. de flux. Meth. inv. p. 73 — 86.

ik) De Moivre erinnert mit Recht, daß das Fortschreitungsgesetz bey dieser Aufgabe das Wichtigste sey: quod maxime requiritur est Lex illa secundum quam Natura procedit in Coefficientibus formandi, sque donec exhibeatur Series ipsae exigui sunt momenti. Anim. in Cheyn. p. 74. Dieses für seine Umkehrungsformel sehr zusammengesezte Gesetz, giebt er nun (Ebend. p. 84.) in 6 verschiedenen Puncten an, die eine volle Octavseite ausfüllen, und von welchen die oben (S. 42. Note dd) aus den Transactionen angeführte combinatorische Vorschrift: Combine the Capital Letters as often etc. den 4ten Punct ausmacht.

kl) Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, §. 104. S. 605. u. f. das zwar leicht in die Augen fallende aber dennoch äusserst ver-

angewendet, und das Resultat in einem besondern Gesetze ausgedrückt, auch die Formel für den häufig vorkommenden bestimmten Fall

$$ay = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}$$

daraus hergeleitet, und um ein paar Glieder weiter calculirt, und zum Gebrauch aufgestellt [lm]), als man solche aus den von de Moivre berechneten Gliedern ableiten kann. Endlich haben Herr Professor Hindenburg und Herr Magister Eschenbach, durch Anwendung der combinatorisch-analytischen Methode, die noch übrigen sehr beträchtlichen Schwierigkeiten bey dem Gebrauche dieser Formeln, ansehnlich erleichtert und zulezt ganz aufgehoben. Herr Hindenburg hat nemlich 1) das Gesetz der willkührlich angenommenen, und nach der Moivrischen Methode behandelten, Coefficienten $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$.... der Umkehrungsreihe in einer combinatorisch-analytischen Formel von sehr einfacher Gestalt zuerst ausgedrückt [mn]), auch 2) noch eine andere, eben so einfach ausgedrückte, aber in der Anwendung ungleich bequemere Formel für eben diese Coefficienten angegeben [no]), hat ferner 3) ausdrücklich erinnert, es liessen sich diese Coefficienten der Umkehrungsreihe auch blos durch die

vermickelte Gesetz steht S. 610. Von beiderley Gesetzen, dem Moivrischen und Tempelhofischen, hat auch Herr Magister Eschenbach gute Bemerkungen gemacht: de Serierum Reverſ. §. III. und IV.

lm) Tempelhof am angeführten Orte, §. 808. die berechneten Glieder stehen S. 616. 617. Er hat sie aus seiner Doppelreihe hergeleitet. Die Substitutionen und daraus folgenden Bestimmungen, nehmen 7 Octavseiten ein.

mn) Nov. Syſt. Comb. p. XXX.

no) Ebend. p. XXXI.

die gegebenen Coefficienten a, b, c, d.... ganz independent von vorhergehenden darstellen op), auch müsse man 4) eine allgemeiner ausgedruckte Gleichung

$$z^n = ay^\mu + by^{\mu+\delta} + cy^{\mu+2\delta} + dy^{\mu+3\delta} + \text{rc.}$$

zum Grund legen, und die Umkehrungsreihe nicht blos für y, sondern für jede unbestimmte Potenz y^ϱ ausdrücken pq). Auch ließ sich nur allein von den beiden lezten Umständen (3. und 4.) und ihrer geschickten Vereinigung mit einander (dieser Allgemeinheit und jener Independenz) eine eben so allgemeine und directe, als für die Ausübung bequeme, Auflösung des so wichtigen Problems der Umkehrung der Reihen verhoffen.

Es wird nicht überflüssig seyn, bevor ich weiter gehe, noch kürzlich zu zeigen, wie und wodurch die vorerwähnten, von Herrn Hindenburg zuerst in combinatorischen Zeichen ausgedrückten, beiden Formeln zu Bestimmung der in der Umkehrungsreihe willkührlich angenommenen Coefficienten, verschieden sind.

Die

op) Ebend. Exhiberi etiam statim (d. i. independent von vorhergehenden Coefficienten) possunt Coefficientes terminorum Serici y (der Umkehrungsreihe) per datos Coefficientes a, b, c, d.... (der gegebenen umzukehrenden Reihe) In dieser gleich anfänglich mehr als Vermuthung ward Herr Hindenburg bestärkt, und zu der eben angeführten Aussage bewogen, weil er in den Exempeln oben (Note gh) angeführten Newtonischen Umkehrungen gefunden hatte, daß die Zahlwerthe der Buchstaben in den einzelnen Gliedern, immer eine ganz bestimmte Summe ausmachten. Unzählige andere Beyspiele, die auf diese Erscheinung entwickelt wurden, bestätigten dasselbe.

pq) Ebendas. p. XXIX. die dortige Aufgabe, wie sie unter der Rubrik: Serierum Inversio sive Regressus, angeführt und ausgedrückt worden.

Die gegebene Gleichung sey allgemein

$$\text{I.}\quad y = ax^a + bx^b + cx^c + \text{etc.}$$

Die Form der Umkehrungsreihe

$$\text{II.}\quad x = \dot{\mathfrak{A}}y^\alpha + \dot{\mathfrak{B}}x^\beta + \dot{\mathfrak{C}}x^\gamma + \text{etc.}$$

wo die Exponenten $a, b, c \ldots\ldots;\ \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ gewöhnlich arithmetische Progressionen der beiden zusammengehörigen Reihen I. II. bedeuten: so lassen sich die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}} \ldots$ auf einem doppelten Wege bestimmen:

Entweder

1) Daß man x in II. zu Potenzen $x^a, x^b, x^c \ldots\ldots$ (wie in I. vorkommen) erhebt, die so durch y ausgedrückten Werthe dieser Potenzen, statt $x^a, x^b, x^c \ldots\ldots$ in I. substituirt, und dann alle in einerley Potenz von y multiplicirte Coefficienten, nach und nach $= 0$ sezt.

Oder

2) Daß man y in I. zu Potenzen $y^\alpha, y^\beta, y^\gamma \ldots\ldots$ (wie in II. vorkommen) erhebt, die so durch x ausgedrückten Werthe dieser Potenzen, statt $y^\alpha, y^\beta, y^\gamma \ldots\ldots$ in II. substituirt, und dann alle in einerley Potenz von x multiplicirte Coefficienten, nach und nach $= 0$ sezt.

In diesen (nach 1. oder 2.) gleich Null gesezten Coefficienten der Potenzen von y oder x, sind die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}} \ldots\ldots$ der Umkehrungsreihe mit enthalten, und lassen sich selbige auf diesem Wege bestimmen und durch einander ausdrücken.

Exempel. Für $a, b, c \ldots\ldots = \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ wäre

$$\text{I.}\quad y = ax^1 + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

und die Umkehrungsreihe

$$\text{II.}\quad x = \dot{\mathfrak{A}}y^1 + \dot{\mathfrak{B}}y^2 + \dot{\mathfrak{C}}y^3 + \dot{\mathfrak{D}}y^4 + \text{etc.}$$

Multi-

Multipliciret man hier die Potenzen x^1, x^2, x^3.... aus II, mit ihren zugehörigen Coefficienten a, b, c.... in I. und drückt so alles durch y aus, so giebt

das Verfahren nach I.

$$
\begin{array}{rcl}
ax & = & a\dot{\mathfrak{A}}y^1 + a\dot{\mathfrak{B}}y^2 + a\dot{\mathfrak{C}}y^3 + a\dot{\mathfrak{D}}y^4 + \text{ꝛc.} \\
+\,bx^2 & = & \qquad\quad b\mathfrak{b}^2By^2 + b\mathfrak{b}^3By^3 + b\mathfrak{b}^4By^4 + \text{ꝛc.} \\
+\,cx^3 & = & \qquad\qquad\qquad\quad + c\mathfrak{c}^3Cy^3 + c\mathfrak{c}^4Cy^4 + \text{ꝛc.} \\
+\,dx^4 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + d\mathfrak{d}^4Dy^4 + \text{ꝛc.} \\
\text{"} & & \\
\text{"} & & \\
-\,y & = & -\,1\,.\,y^1
\end{array}
$$

Was hier linker Hand des Gleichheitszeichens steht, ist zusammen $= 0$, folglich auch das, was rechter Hand steht. Setzt man also die hier zu einerley Potenzen von y gehörigen Coefficienten nach und nach $= 0$, so folgen daraus die Werthe der Coefficienten der Umkehrungsreihe

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a};\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{b\mathfrak{b}^2B}{a};\ \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{b\mathfrak{b}^3B + c\mathfrak{c}^3C}{a};$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{b\mathfrak{b}^4B + c\mathfrak{c}^4C + d\mathfrak{d}^4D}{a};\ \text{u. s. w.}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \dot{\mathfrak{A}} & \dot{\mathfrak{B}} & \dot{\mathfrak{C}} & \dot{\mathfrak{D}} & \dot{\mathfrak{E}} & \dots \end{array}\right)$$

wie solche Nov. Syst. Comb. p. XXX. sind angegeben worden.

Multiplicirt man hingegen die Potenzen y^1, y^2, y^3.... aus I. mit ihren zugehörigen Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$.... in II. und drückt so alles durch x aus, so giebt

 das

das Verfahren nach 2

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{A}}y^1 &= \dot{\mathfrak{A}}ax^1 + \dot{\mathfrak{A}}bx^2 + \dot{\mathfrak{A}}cx^3 + \dot{\mathfrak{A}}dx^4 + \text{rc.}\\
+\dot{\mathfrak{B}}y^2 &= \phantom{\dot{\mathfrak{A}}ax^1} + \dot{\mathfrak{B}}b^2Bx^2 + \dot{\mathfrak{B}}b^3Bx^3 + \dot{\mathfrak{B}}b^4Bx^4 + \text{rc.}\\
+\dot{\mathfrak{C}}y^3 &= \phantom{\dot{\mathfrak{A}}ax^1 + \dot{\mathfrak{B}}b^2Bx^2} + \dot{\mathfrak{C}}c^3Cx^3 + \dot{\mathfrak{C}}c^4Cx^4 + \text{rc.}\\
\dot{\mathfrak{D}}y^4 &= \phantom{\dot{\mathfrak{A}}ax^1 + \dot{\mathfrak{B}}b^2Bx^2 + \dot{\mathfrak{C}}c^3Cx^3} + \dot{\mathfrak{D}}d^4Dx^4 + \text{rc.}\\
&\;\;\text{"}\quad\text{"}\\
&\;\;\text{"}\quad\text{"}\\
-x &= -1.x^1
\end{aligned}
$$

Hier ist wieder, was linker Hand des Gleichheitszeichens steht, zusammen $= 0$, folglich auch das, was rechter Hand steht. Sezt man also die hier zu einerley Potenzen von x gehörigen Coefficienten nach und nach $= 0$, so folgen daraus, wenn man sogleich a^2, a^3, a^4.... statt b^2B, b^3B, b^4B..... sezt, die Werthe der Coefficienten der Umkehrungsreihe

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a};\quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}b}{a^2};\quad \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}c + \dot{\mathfrak{B}}b^3B}{a^3}$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}d + \dot{\mathfrak{B}}b^4B + \dot{\mathfrak{C}}c^4C}{a^4};\ \text{u. s. w.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

wie solche Nov. Syst. Comb. p. XXXI. sind angegeben worden.

Da die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.... des Zeigers der Formeln in 1. sich auf die zu bestimmenden, und, wie man sieht, sehr zusammengesezten Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{E}}$.... der Umkehrungsreihe in II. die Zahlen aber des Zeigers der Formeln in 2. sich nur auf die viel einfachern Coefficienten a, b, c, d, e,... der gegebenen Reihe in I. beziehen: so giebt das Verfahren nach 2. diese Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$....

ohne

ohne allen Vergleich viel leichter, als das Verfahren nach 1. wie auch Herr Hindenburg am angeführten Orte p. XXXI. ausdrücklich erinnert hat.

Das Umkehrungsverfahren nach 1. ist zuerst von de Moivre gebraucht worden, um zu zeigen, wie man, wenn

$$az + bz^2 + cz^3 + \text{etc.} = gy^1 + hy^2 + iy^3 + \text{etc.} \quad (P)$$

gegeben ist, z durch y, oder y durch z, vermittelst der willkührlich angenommenen Gleichungen

$$z = \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 + \text{etc.}$$

$$y = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \dot{\mathfrak{D}}z^4 + \text{etc.}$$

durch Substitution nemlich der Werthe der Potenzen von z oder y dieser Gleichungen in die gegebene Gleichung, um die willkührlich angenommenen Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$.... oder $\dot{A}$, $\dot{B}$.... dadurch zu bestimmen [qr]), finden könne. Von da hat man das Verfahren weiter auch auf den Fall angewendet, wenn (wie in I.) statt der einen Reihe nur eine einzige variable Grösse steht, wie Haussen, v. Tempelhof, Karsten [rs]) und andere gethan haben. Man kann also das Verfahren nach 1. das Moivrische nennen. Das Verfahren nach 2. mag das Hindenburgische heissen,

J 2 um

qr) Dies ist Moivres ausdrückliche Vorschrift, womit er den Beweis seines Theorems anfängt, nach welchem er z durch y ausdrückt: Suppose $z = Ay + By^2 + Cy^3 +$ etc. substitute this Series in the room of z, and the Powers of this Series, in the room of the Powers of z etc. in die Stellen nemlich von z, z², z³.... der gegebenen Gleichung (P) Phil. Trans. Vol. XX. Art. X. p. 191.

rs) Hausen Elem. Mathes. p. 173. 6. Tempelhof Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, §. 808 wo die dortige Reihe auf die allgemeinere (§. 804.) bezogen wird, in welcher aber die angenommene Umkehrungsformel auf die Moivrische Art gebraucht wird. Karstens Anfangsgründe der mathematischen Analysis, §. 264.

Werthe, nach dem hier beygefügten Index, sich so leicht und ohne alle weitere Reduction, unabhängig finden, selbst durch Tafeln im Voraus angeben lassen. So käme für das vorhergehende de la Grangische Exempel, die Buchstaben in der Formel (Nov. Syst. Comb. p. LXXXII. 6.) so wie vorher (S. 118.) bereits angezeigt worden ist, (statt der Moivrischen Coefficienten in L) sogleich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y} = 1 & \\ & + a^1A(\alpha y)^q \\ & + [a^2A + b^2B](\alpha y)^{2q} \\ & + [a^3A + b^3B + c^3C](\alpha y)^{3q} \\ & + [a^4A + b^4B + c^4C + d^4D](\alpha y)^{4q} \\ & + [a^5A + b^5B + c^5C + d^5D + e^5E](\alpha y)^{5q} \\ & \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots\ldots \\ \beta u; & \gamma u; & \delta u; & \varepsilon u \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

welches die Glieder wie in V. giebt. Im Index stehen hier lauter positive Grössen, βu, γu &c. dafür haben aber auch hier die ungeraden Classen entgegengesezte Zeichen, mit denen in der Hindenburgischen Tafel. Für $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ -\beta u; & -\gamma u; & -\delta u \ldots \end{pmatrix}$ wären auch die Zeichen der Combinationsclassen geblieben, wie sie in der Tafel stehen [fg]).

Hätte Herr de la Grange die so wichtige Beziehung der gegebenen Coefficienten β, γ, δ, ε, ζ.... auf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.... und dieser Coefficienten weitere Zusammensetzung

fg) Einen nützlichen, hieher gehörigen Satz, hat Herr Fischer (§. 40.) beygebracht, der aber in der Allgemeinheit, wie er dort vorgetragen wird, noch einige Einschränkung leidet; und an mehrere Orte, wo er zur Bequemlichkeit des Lesers benutzt werden konnte, ungebraucht vorbeygegangen wird.

mensetzung nach bestimmten Summen solcher Zahlen, folglich das Combinationsgesetz der durch β, γ, δ, ε, ζ.... ausgedruckten Werthe seiner Coefficienten A, B.... B', C'.. u. s. w. (in IV.) wahrgenommen oder auch nur geahndet — eine nähere Veranlassung dazu konnte seyn, wenn es ihm, bey Festsetzung seines Gesetzes, (in III.) eingefallen wäre, die Abhängigkeit der spätern Zeichen desselben von allen vorhergehenden frühern schlechterdings aufzuheben — welche Aufhebung nur allein auf dem combinatorischen Wege möglich ist, so ist kein Zweifel: dieser grosse Analyst würde dadurch zu weiterm Nachdenken über die so wichtige Verbindung der Combinationslehre mit der Analysis geleitet worden seyn; und so wäre wahrscheinlich die Erfindung und Ausbildung der combinatorischen Analytik nach ihrem ausgedehntesten Umfange, die weitere Vervollkommung derselben in Absicht auf Theorie und Anwendung, vorlängst ein Werk seines schöpferischen Geistes geworden.

Ein neues Beyspiel zu dem Erfahrungssatze, wie nahe man oft grossen Entdeckungen seyn kann, ohne jedoch, selbst unter den günstigsten Aussichten und sehr nahen Veranlassungen dazu, welche die Umstände und die Sache selbst darbieten, im geringsten etwas davon zu ahnden!

XII.

Kurze Darstellung dessen, was vor der Ausgabe des Fischerischen Werks über die Aufgabe der Umkehrung der Reihen bekannt gewesen. Herr Fischer ist seinen neuesten Vorgängern bey Behandlung und Auflösung dieses Problems getreulich, Schritt für Schritt, nachgegangen, und hat nicht das Geringste von dem Seinigen hinzugethan. Die Fischerische sogenannte allgemeine Auflösungsformel ist von der Eschenbachischen Umkehrungsformel nur allein dem Namen nach unterschieden, und erstere von lezterer blos übersezt, oder, mutatis mutantis, abgeschrieben.

Herr Fischer ist, wie er auch selbst erinnert, auf einem ganz andern Wege, als Herr de la Grange, zu der Auflösung des Problems über die Umkehrung der Reihen, oder, der allgemeinen Auflösungsmethode, wie er sie nennt, gelangt, hat auch eine von jener ganz verschiedene, sehr einfache, und für die Anwendung auf Umkehrungen noch bequemere Formel aufgestellt. In wie fern aber dieser Weg von ihm zuerst betreten worden, und die mitgetheilte Formel der Umkehrungs- oder Auflösungsformel sein Eigenthum sey, wofür er sie ausgiebt, davon wird man am besten aus Folgendem urtheilen können.

Newtons beide Theoreme über die Umkehrung gh) von

gh) Newt. Fragm. Epist. ad Oldenb. in Anal. per Quantit. Ser. etc. p. 32.

von $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ 2c.

und $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ 2c.

sind bekannt. Da er aber den Werth von y nur in 5 Gliedern berechnet, und das Gesetz, das sie befolgen, und wie sie weiter fortgesezt werden können, nicht mit angegeben hat: so ist ihr Gebrauch, noch ausser der Beschränkung, welche die Gestalt der beiden Reihen vorschreibt, in sehr enge Gränzen eingeschlossen. Nachher hat de Moivre ein ausführliches Theorem über die Umkehrung der Reihen

$az + bz^2 + cz^3 +$ 2c. $= gy + hy^2 + iy^3$ 2c.

bekannt gemacht [hi]) und in einer Formel vorgetragen, auch das sehr zusammengesezte [ik]) Fortschreitungsgesetz der Glieder seiner Formel deutlich, aber nur durch Worte, beschrieben, weil es ihm an schicklichen Zeichen, zur bequemen Darstellung dieses Gesetzes, noch fehlte. Herr von Tempelhof [kl]) hat eine ähnliche Analysis auf die Umkehrung der Reihen

$ay^m + by^{m+1} + cy^{m+2} +$ 2c. $= \alpha x^m + \beta x^{m+1} + \gamma^{m+2}$ 2c.

ange-

hi) Philos. Transact. Vol. XX. p. 190. und in Moivraei animadv. in Cheyn. Tract. de flux. Meth. inv. p. 73 — 86.

ik) De Moivre erinnert mit Recht, daß das Fortschreitungsgesetz bey dieser Aufgabe das Wichtigste sey: quod maxime requiritur est Lex illa secundum quam Natura procedit in Coefficientibus formandi, quae donec exhibeatur Series ipsae exigui sunt momenti. Anim. in Cheyn. p. 74. Dieses für seine Umkehrungsformel sehr zusammengesezte Gesetz, giebt er nun (Ebend. p. 84.) in 6 verschiedenen Puncten an, die eine volle Octavseite ausfüllen, und von welchen die oben (S. 42. Note dd) aus den Transactionen angeführte combinatorische Vorschrift: Combine the Capital Letters as often etc. den 4ten Punct ausmacht.

kl) Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, §. 104. S. 605. u. f. das zwar leicht in die Augen fallende aber dennoch äusserst ver-

angewendet, und das Resultat in einem besondern Gesetze ausgedrückt, auch die Formel für den häufig vorkommenden bestimmten Fall

$$ay = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{rc.}$$

daraus hergeleitet, und um ein paar Glieder weiter calculirt, und zum Gebrauch aufgestellt [lm]), als man solche aus den von de Moivre berechneten Gliedern ableiten kann. Endlich haben Herr Professor Hindenburg und Herr Magister Eschenbach, durch Anwendung der combinatorisch-analytischen Methode, die noch übrigen sehr beträchtlichen Schwierigkeiten bey dem Gebrauche dieser Formeln, ansehnlich erleichtert und zulezt ganz aufgehoben. Herr Hindenburg hat nemlich 1) das Gesetz der willkührlich angenommenen, und nach der Moivrischen Methode behandelten, Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$.... der Umkehrungsreihe in einer combinatorisch-analytischen Formel von sehr einfacher Gestalt zuerst ausgedrückt [mn]), auch 2) noch eine andere, eben so einfach ausgedrückte, aber in der Anwendung ungleich bequemere Formel für eben diese Coefficienten angegeben [no]), hat ferner 3) ausdrücklich erinnert, es liessen sich diese Coefficienten der Umkehrungsreihe auch blos durch die

verwickelte Gesetz steht S. 610. Von beiderley Gesetzen, dem Moivrischen und Tempelhofischen, hat auch Herr Magister Eschenbach gute Bemerkungen gemacht: de Serierum Reverſ. §. III. und IV.

lm) Tempelhof am angeführten Orte, §. 808. die berechneten Glieder stehen S. 616. 617. Er hat sie aus seiner Doppelreihe hergeleitet. Die Substitutionen und daraus folgenden Bestimmungen, nehmen 7 Octavseiten ein.

mn) Nov. Syſt. Comb. p. XXX.

no) Ebend. p. XXXI.

die gegebenen Coefficienten a, b, c, d.... ganz independent von vorhergehenden darstellen op), auch müsse man 4) eine allgemeiner ausgedruckte Gleichung

$$z^n = ay^\mu + by^{\mu+\delta} + cy^{\mu+2\delta} + dy^{\mu+3\delta} + \text{ꝛc.}$$

zum Grund legen, und die Umkehrungsreihe nicht blos für y, sondern für jede unbestimmte Potenz y^ϱ ausdrücken pq). Auch ließ sich nur allein von den beiden lezten Umständen (3. und 4.) und ihrer geschickten Vereinigung mit einander (dieser Allgemeinheit und jener Independenz) eine eben so allgemeine und directe, als für die Ausübung bequeme, Auflösung des so wichtigen Problems der Umkehrung der Reihen verhoffen.

Es wird nicht überflüssig seyn, bevor ich weiter gehe, noch kürzlich zu zeigen, wie und wodurch die vorerwähnten, von Herrn Hindenburg zuerst in combinatorischen Zeichen ausgedrückten, beiden Formeln zu Bestimmung der in der Umkehrungsreihe willkührlich angenommenen Coefficienten, verschieden sind.

Die

op) Ebend. Exhiberi etiam statim (d. i. independent von vorhergehenden Coefficienten) possunt Coefficientes terminorum Seriei y (der Umkehrungsreihe) per datos Coefficientes a, b, c, d.... (der gegebenen umzukehrenden Reihe) In dieser gleich anfänglich mehr als Vermuthung ward Herr Hindenburg bestärkt, und zu der eben angeführten Aussage bewogen, weil er in den Exempeln oben (Note gh) angeführten Newtonischen Umkehrungen gefunden hatte, daß die Zahlwerthe der Buchstaben in den einzelnen Gliedern, immer eine ganz bestimmte Summe ausmachten. Unzählige andere Beyspiele, die auf diese Erscheinung entwickelt wurden, bestätigten dasselbe.

pq) Ebendas. p. XXIX. die dortige Aufgabe, wie sie unter der Rubrik: Serierum Inversio sive Regressus, angeführt und ausgedrückt worden.

Die gegebene Gleichung sey allgemein

$$\text{I.}\quad y = ax^a + bx^b + cx^c + \text{rc.}$$

Die Form der Umkehrungsreihe

$$\text{II.}\quad x = \dot{\mathfrak{A}}y^\alpha + \dot{\mathfrak{B}}x^\beta + \dot{\mathfrak{C}}x^\gamma + \text{rc.}$$

wo die Exponenten $a, b, c \ldots.;\ \alpha, \beta, \gamma \ldots.$ gewöhnlich arithmetische Progressionen der beiden zusammengehörigen Reihen I. II. bedeuten: so lassen sich die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}} \ldots$ auf einem doppelten Wege bestimmen:

Entweder

1) Daß man x in II. zu Potenzen $x^a, x^b, x^c \ldots.$ (wie in I. vorkommen) erhebt, die so durch y ausgedruckten Werthe dieser Potenzen, statt $x^a, x^b, x^c \ldots.$ in I. substituirt, und dann alle in einerley Potenz von y multiplicirte Coefficienten, nach und nach $= 0$ sezt.

Oder

2) Daß man y in I. zu Potenzen $y^\alpha, y^\beta, y^\gamma \ldots.$ (wie in II. vorkommen) erhebt, die so durch x ausgedrückten Werthe dieser Potenzen, statt $y^\alpha, y^\beta, y^\gamma \ldots.$ in II. substituirt, und dann alle in einerley Potenz von x multiplicirte Coefficienten, nach und nach $= 0$ sezt.

In diesen (nach 1. oder 2.) gleich Null gesezten Coefficienten der Potenzen von y oder x, sind die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}} \ldots.$ der Umkehrungsreihe mit enthalten, und lassen sich selbige auf diesem Wege bestimmen und durch einander ausdrücken.

Exempel. Für $a, b, c \ldots. = \alpha, \beta, \gamma \ldots. = 1, 2, 3 \ldots.$ wäre

$$\text{I.}\quad y = ax^1 + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{rc.}$$

und die Umkehrungsreihe

$$\text{II.}\quad x = \dot{\mathfrak{A}}y^1 + \dot{\mathfrak{B}}y^2 + \dot{\mathfrak{C}}y^3 + \dot{\mathfrak{D}}y^4 + \text{rc.}$$

Multi-

wenn nehmlich die Coefficienten A, B, C.... B^I, C^I, D^I.... u. s. w. in II. so bestimmt werden, daß

$$
\begin{array}{lll}
\text{(III)}\; A = \beta & & \\
B = \gamma; & B^I = \beta A & \\
C = \delta; & C^I = \gamma A + \beta B & \\
D = \varepsilon; & D^I = \delta A + \gamma B + \beta C & \\
E = \zeta; & E^I = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
C^{II} = \beta B \\
D^{II} = \gamma \beta^I + \beta C^I; \quad D^{III} = \beta C^{II} \\
E^{II} = \delta B^I + \gamma C^I + \beta D^I; E^{III} = \gamma C^{II} + \beta D^{III}; E^{IV} = \beta D^{III} \\
\quad\text{rc.} \qquad \text{rc.} \qquad \text{rc.}
\end{array}
$$

Die so bestimmten grossen Buchstaben zeigen ein sehr leichtes Gesetz der Entwickelung, nach welchem auch Herr de la Grange (§. 22.) folgende, durch die gegebenen Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.... des Nenners Y ausgedruckte, Werthe derselben herleitet.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(IV)}\; A = \beta & & \\
B = \gamma; \; B^I = \beta^2 & & \\
C = \delta; \; C^I = 2\beta\gamma; & & C^{II} = \beta^3 \\
D = \varepsilon; \; D^I = 2\beta\delta + \gamma^2; & & D^{II} = 3\beta^2\gamma; \\
E = \zeta; \; E^I = 2\beta\varepsilon + 2\delta\gamma; & & E^{II} = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2; \\
 & & D^{III} = \beta^4 \\
 & & E^{III} = 4\beta\gamma^4; \; E^{IV} = \beta^5
\end{array}
$$

Sezt man nun die hier (in IV.) gefundene Werthe von A, B, C.... B^I, C^I, D^I.... u. s. w. in die Werthe der angenommenen Coefficienten P, Q, R, S, T (in II.) so findet man dadurch den endlichen Werth der gebrochenen Function $\frac{1}{Y}$ folgendergestalt:

(V)

das Verfahren nach 2

$$\dot{\mathfrak{A}}y^1 = \dot{\mathfrak{A}}ax^1 + \dot{\mathfrak{A}}bx^2 + \dot{\mathfrak{A}}cx^3 + \dot{\mathfrak{A}}dx^4 + \text{rc.}$$
$$+\dot{\mathfrak{B}}y^2 = \qquad + \dot{\mathfrak{B}}b^2Bx^2 + \dot{\mathfrak{B}}b^3Bx^3 + \dot{\mathfrak{B}}b^4Bx^4 + \text{rc.}$$
$$+\dot{\mathfrak{C}}y^3 = \qquad + \dot{\mathfrak{C}}c^3Cx^3 + \dot{\mathfrak{C}}c^4Cx^4 + \text{rc.}$$
$$\dot{\mathfrak{D}}y^4 = \qquad + \dot{\mathfrak{D}}d^4Dx^4 + \text{rc.}$$

" "

" "

$$-x = -1.x^1$$

Hier ist wieder, was linker Hand des Gleichheitszeichens steht, zusammen $= 0$, folglich auch das, was rechter Hand steht. Sezt man also die hier zu einerley Potenzen von x gehörigen Coefficienten nach und nach $= 0$, so folgen daraus, wenn man sogleich a^2, a^3, $a^4 \ldots$ statt b^2B, b^3B, $b^4B \ldots$ sezt, die Werthe der Coefficienten der Umkehrungsreihe

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a};\quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}b}{a^2};\quad \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}c + \dot{\mathfrak{B}}b^3B}{a^3}$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}d + \dot{\mathfrak{B}}b^4B + \dot{\mathfrak{C}}c^4C}{a^4};\ \text{u. s. w.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

wie solche Nov. Syst. Comb. p. XXXI. sind angegeben worden.

Da die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.... des Zeigers der Formeln in 1. sich auf die zu bestimmenden, und, wie man sieht, sehr zusammengesezten Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{E}}$.... der Umkehrungsreihe in II. die Zahlen aber des Zeigers der Formeln in 2. sich nur auf die viel einfachern Coefficienten a, b, c, d, e,... der gegebenen Reihe in I. beziehen: so giebt das Verfahren nach 2. diese Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$....

ohne

ohne allen Vergleich viel leichter, als das Verfahren nach 1. wie auch Herr Hindenburg am angeführten Orte p. XXXI. ausdrücklich erinnert hat.

Das Umkehrungsverfahren nach 1. ist zuerst von de Moivre gebraucht worden, um zu zeigen, wie man, wenn

$$az + bz^2 + cz^3 + \text{ꝛc.} = gy^1 + hy^2 + iy^3 + \text{ꝛc.} \quad (P)$$

gegeben ist, z durch y, oder y durch z, vermittelst der willkührlich angenommenen Gleichungen

$$z = \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 + \text{ꝛc.}$$

$$y = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \dot{\mathfrak{D}}z^4 + \text{ꝛc.}$$

durch Substitution nemlich der Werthe der Potenzen von z oder y dieser Gleichungen in die gegebene Gleichung, um die willkührlich angenommenen Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$.... oder $\dot{A}$, $\dot{B}$.... dadurch zu bestimmen [qr]), finden könne. Von da hat man das Verfahren weiter auch auf den Fall angewendet, wenn (wie in I.) statt der einen Reihe nur eine einzige variable Grösse steht, wie Haussen, v. Tempelhof, Karsten [rs]) und andere gethan haben. Man kann also das Verfahren nach 1. das Moivrische nennen. Das Verfahren nach 2. mag das Hindenburgische heissen,

 um

qr) Dies ist Moivres ausdrückliche Vorschrift, womit er den Beweis seines Theorems anfängt, nach welchem er z durch y ausdrückt: Suppose $z = Ay + By^2 + Cy^3 +$ etc. substitute this Series in the room of z, and the Powers of this Series, in the room of the Powers of z etc. in die Stellen nemlich von z, z^2, z^3.... der gegebenen Gleichung (P) Phil. Transf. Vol. XX. Art. X. p. 191.

rs) Hausen Elem. Mathes. p. 173. 6. Tempelhof Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, §. 808 wo die dortige Reihe auf die allgemeinere (§. 804.) bezogen wird, in welcher aber die angenommene Umkehrungsformel auf die Moivrische Art gebraucht wird. Karstens Anfangsgründe der mathematischen Analysis, §. 264.

um es von jenem zu unterscheiden, und weil ich nicht gefunden habe, daß vor Herrn Hindenburg sich jemand desselben bedient, also auch nicht den grossen Vorzug desselben vor dem Moivrischen bemerkt habe; denn selbst Karsten [st]) bringt, bey Umkehrung der Reihe

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ꝛc.}$$

das Moivrische viel weitläuftigere Verfahren, noch im Jahre 1786 an.

Ob nun aber schon die Hindenburgische Form, in Absicht auf Leichtigkeit der Entwickelung, vor der Moivrischen sehr viel voraus hat: so ist doch die Recurrenz auf vorhergehende Coefficienten bey ihr nur vermindert, keinesweges aufgehoben. Dieser Umstand erschwert aber die Entwickelung noch beträchtlich, und macht die Darstellung eines Coefficientens der Umkehrungsreihe, ausser der Ordnung, unmöglich. Es hat daher Herr Magister Eschenbach, der schon vorher rühmliche Proben seiner gründlichen Kenntnisse und seiner genauen Bekanntschaft mit der combinatorischen Analytik gegeben hatte [tu]), ein ungemeines Verdienst um die Aufgabe über die Umkehrung der Reihen sich erworben, daß er, durch reifliche Erwägung der Hindenburgischen Behauptung von möglicher Aufhebung der Recurrenz der Coefficienten in der Umkehrungsreihe, durch sorgfältige Vergleichung der nur erwähnten beiden combinatorisch-analytischen Formen, so wie durch weitere fortgesezte Analyse, besonders der zweyten verkürzten, endlich eine Formel entwickelt

st) In der in der vorigen Note angezeigten Stelle. Die Ausgabe des Buchs ist vom Jahre 1786.

tu) In mehrern kleinen Schriften und Uebersetzungen, mehrentheils physischen Inhalts. Vor andern gehört hieher seine Commentatio de multipli angulorum tangentibus, Lipſ. 1785. welche verschiedene nützliche combinatorisch-analytische Formeln enthält.

wickelt hat, bey welcher Allgemeinheit und Independenz, mit der größten Leichtigkeit in der Anwendung auf vorkommende Fälle, verbunden sind, indem alles bey ihr, wie solches Herr Hindenburg bereits an den beiden speciellen Newtonischen und andern von ihm berechneten Beyspielen wahrgenommen hatte [uv]), blos durch die gegebenen Coefficienten a, b, c, d.... der umzukehrenden gegebenen Reihe, mit Zuziehung der gegebenen Exponenten, auf eine über alle Erwartung kurze und höchst bequeme Art ausgedruckt wird [vw]).

Herr

uv) Man sehe S. 127. die Note op.

vw) De Serierum Reversione formulis analytico-combinatoriis exhibita specimen. Eine Dissertation vom 30. May 1789. Voran eine Kritik über de Moivres und v. Tempelhofs Umkehrungsmethode und Formeln. Dann eine erklärende Darlegung verschiedener Zeichen und Sätze aus der Hindenburgischen combinatorischen Analytik, so viel die Formeln zu verstehen und zu gebrauchen nöthig ist. Die wichtige Umkehrungsformel, wenn

$$z^{\Lambda} = \alpha y^{\Pi} + \beta y^{\Pi+\Delta} + \gamma y^{\Pi+2\Delta} + \text{rc.}$$

gegeben ist, und y^{Σ} verlangt wird, (wo Λ, Π, Δ, Σ, alles seyn können) steht §. VII. p. 23. 24. Einen Beweis dieser Formel bringt Herr Magister Eschenbach nicht bey, weil er dergleichen nicht wußte, indem er blos mit einer unvollständigen Induction dafür sich hatte begnügen müssen, mit deren Vorlegung er jedoch den Leser verschonen zu müssen geglaubt hat. Die Formel ist aber, in der ganzen Ausdehnung die sie hat, vollkommen wahr, und ein Beweis davon, durch die so wichtigen Localausdrücke in aller Strenge geführt, wird nächstens dem Publikum von einem jungen Manne vorgelegt werden, von dessen Penetration und Scharfsinnigkeit die combinatorische Analytik, so wie die Analysis überhaupt, künftig viel erwarten darf. Eine zweyte Umkehrungsformel, für die Gleichung

$$ax^{p\Pi} + bx^{p(\Pi+\Delta)} + \text{rc.} = \alpha^{\Pi} + \beta^{\Pi+\Delta} + \text{rc.}$$

hat Herr Magister Eschenbach §. VIII. p. 30. 31. gegeben. Am Ende sind p. 36. 37. die beiden Hindenburgischen Tafeln (Infin

Dign.

Herr Professor Hindenburg hat also das bis dahin unbekannte Land zuerst aus der Ferne gesehen und angezeigt; Herr Magister Eschenbach hat es nachher genauer erforscht und deutlich beschrieben.

Das Beygebrachte kann hinreichend seyn, sich einen vollständigen Begriff von dem zu machen, was man vor der Ausgabe des Fischerischen Werks in der Sache gethan und gewußt hat [wx]). Insbesondere kann man nun vermittelst der Eschenbachischen Formel sogleich, auf einem directen ganz leichten Wege, die Umkehrung unmittelbar vornehmen, ohne daß man nöthig hätte, wie bis dahin oft geschehen war, zu Vermeidung unübersehbarer Substitutionen und Rechnungen, sie auf Nebenwegen zu umschleichen [xy]). Drey volle Jahre, nachdem Herr Eschenbach seine

Dign. p. 166. 167.) beygefügt worden, die sich auf das wichtige combinatorische Discerptionsproblem (Ebend. p. 73 u.) beziehen, welches auch für die Umkehrungsaufgabe, wie für so viel andere, die Basis ist. Herr Mag. Eschenbach hat deswegen das Discerptionsproblem mit dem Hindenburgischen Beweise seiner Abhandlung §. VI. S. 16 — 20. ganz einverleibt.

wx) Von der Leibnitzischen Umkehrungsformel kann man, Infin. Dign. p XV. — XVIII. oder Nov. Syst. Comb. p. XXX. ingleichen Eschenb, de Ser. Reverf. p. 5. Note c. nachsehen. Da Herrn Fischers allgemeines Schema von dem Leibnitzischen ganz verschieden ist, die Behandlung aber der nach de Moivres angenommenen Umkehrungsreihe mit der Hindenburgischen übereinkommt, so habe ich nichts von jener im Vorhergehenden angeführt, um so mehr, da Herr Fischer von Leibnitzen nichts entlehnt hat.

xy) Die Klagen der Analysten, die auch Karsten (Anfangsgründe der mathemat. Anal. S. 540.) noch geführt hat, daß die Umkehrung zu so beschwerlichen Rechnungen führe, und das allgemeine Gesetz der Coefficienten nicht gut übersehen lasse, sind nun durch die Eschenbachische Umkehrungsformel gründlich gehoben. Herrn Karstens Aeusserungen, daß man itzt solche Auf-

seine Formel dem gelehrten Publikum mitgetheilt hatte, auch selbige mit verdientem Beyfalle der Kenner auf- und angenommen worden war, erscheint nun das Fischerische Werk, das gleich in der Vorrede die Mittheilung einer allgemeinen Auflösungsmethode vermittelst einer allgemeinen Auflösungsreihe (oder, wie man aus der Folge ersieht, Umkehrungsformel) verspricht, wo sich erst hinterher veroffenbaret hat, daß Herr de la Grange eine ähnliche Formel bereits bekannt gemacht, aber zugleich versichert wird, Herr Fischer habe die seinige auf einem ganz andern Wege gefunden [yz]). Da in der Schrift weder an dem Orte, wo die Entwickelung der Aufgabe vorgenommen und die Formel vorgelegt wird, noch sonst, von Herrn Hindenburgs und Eschenbachs Bemühungen bey dieser Aufgabe, und was sie für einen Erfolg gehabt, Erwähnung geschieht, obschon der Newtonischen und Moivrischen Auflösungen, als solcher gedacht worden ist, die mühsam und Zeitraubend, auch nicht allgemein genug wären: so läßt sich vermuthen, der von Herrn Fischer eingeschlagene Weg werde ein von diesen beiden Vorgängern noch nicht betretener, und

Aufgaben fast insgesammt kürzer und leichter lösen könne, und daß er seine Klagen nur auf die, wie er sich ausdrückt, bekannten Umkehrungsmethoden erstreckt, zeigen deutlich, welchen Werth er auf eine directe, aber leichte Umkehrungsmethode gesezt, und daß er nicht alle Hoffnung, daß eine solche gefunden werden könne, aufgegeben habe. Aber eine für die Anwendung so äusserst leichte Formel, als die Eschenbachische, hat dieser vortrefliche Mann wohl nicht erwartet.

yz) Herrn de la Granges allgemeine Auflösungsformel, kann auch, da sie die Coefficienten nicht so giebt, wie sie zu einerley Potenzen (von x oder y) gehören, (S. 104.) die Stelle einer allgemeinen Umkehrungsformel nicht mit Bequemlichkeit vertreten.

und die darauf gefundene Formel, von der Eschenbachischen ganz verschieden seyn. In wie fern diese gründliche Vermuthung durch die Sache selbst verificirt oder widerlegt werde, mag die Fischerische Auflösung des Problems zeigen, die ich, Schritt vor Schritt, verfolgen werde.

XIII.

Fortsetzung. Kurze Darstellung des Fischerischen Verfahrens bey Aufsuchung einer von ihm sogenannten allgemeinen Auflösungsmethode, vermittelst einer allgemeinen Auflösungsreihe, nebst beygefügten Bemerkungen darüber.

1) Aufgabe. „Aus dem allgemeinen Schema $y = x^m$ „$+ Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} +$ ꝛc. den Werth irgend einer „Potenz von x, nemlich x^t (was auch t bedeuten mag), „durch eine unendliche, nach Potenzen fortschreitende Reihe, „auszudrücken.

2) Auflösung und Beweis. Man bezeichne die Coefficienten des allgemeinen Schema, vom zweyten Gliede an, mit Dimensionszeichen, so ist

I. $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{m+3r} +$ ꝛc.

Die allgemeine Auflösungsreihe wird seyn:

II. $x^t = y^{\frac{t}{m}} + \dot{\alpha}y^{\frac{t+r}{m}} + \dot{\beta}y^{\frac{t+2r}{m}} + \dot{\gamma}y^{\frac{t+3r}{m}} +$ ꝛc.

wo $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$.... willkührlich angenommene Coefficienten bedeuten.

3) Man

3) Man erhebe y in I. zu Potenzen $y^{\frac{t}{m}}, y^{\frac{t+r}{m}}, y^{\frac{t+2r}{m}} \ldots$ (wie in II. vorkommen) und substituire die solchergestalt durch x ausgedrückten Werthe dieser Potenzen, statt $y^{\frac{t}{m}}$, $y^{\frac{t+r}{m}}, y^{\frac{t+2r}{m}} \ldots$ in II. so kommt:

$$y^{\frac{t}{m}} = x^t + \frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{t+r} + \left(\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)x^{t+2r} + \text{ꝛc.}$$

$$+\dot{\alpha}y^{\frac{t+r}{m}} = \dot{\alpha}x^{t+r} + \dot{\alpha}\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{t+2r} + \text{ꝛc.}$$

$$+\dot{\beta}y^{\frac{t+2r}{m}} = \dot{\beta}x^{t+2r} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc. ꝛc.

4) Bestimmt man hier die Coefficienten rechter Hand des Gleichheitszeichens so, daß alles, das erste Glied x^t ausgenommen, Null wird: so giebt das die oben angenommene Form II. $x^{t'} = y^{\frac{t}{m}} + \dot{\alpha}y^{\frac{t+r}{m}} +$ ꝛc. wieder, und zeigt zugleich die Richtigkeit der Annahme. Man darf also nur die Coefficienten in einerley Potenzen von x (vom zweyten Gliede an) gleich Null setzen.

5) Daraus folgen die Werthe für die willkührlich angenommenen Coefficienten

$$\dot{\alpha} = -\frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$$

$$\dot{\beta} = -\dot{\alpha}\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \left(\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)$$

$$\dot{\gamma} = -\dot{\beta}\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \dot{\alpha}\left(\frac{t+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t+r}{m}\,\frac{t+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)$$

$$-\left(\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\,\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\right)$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

und

und man übersieht sehr leicht, wie diese Ausdrücke fortschreiten.

6) Vermittelst dieser Gleichungen wird jeder der Coefficienten α, β, γ, δ.... durch alle vorhergehende bestimmet. Schon das giebt eine brauchbare Auflösung der Aufgabe, da man doch in jedem Falle die gesuchten Coefficienten, so weit man will, hintereinander finden kann. (So lösete Moivre dies Problem auf, obgleich nur für den eingeschränkten Fall $m = r = t = 1$.) Die Formeln aber werden weit netter, und zur Berechnung geschmeidiger, wenn man sich durch die Schwierigkeiten einer in der That sehr verwickelten, und den unerschrockensten Analysten ermüdenden Rechnung, nicht abschrecken läßt, den Werth dieser Coefficienten nach der Reihe so zu bestimmen, daß jeder durch sich selbst, und unabhängig von allen vorhergehenden, ausgedrückt wird, und das Fortschreitungsgesetz deutlich in die Augen fällt. Das Resultat dieser Rechnung, die ohne Dimensionszeichen so gut als unausführbar seyn möchte, zeigt ein so einfaches Gesetz, daß man es schon nach wenig Gliedern übersieht. (Man sehe hier Tafel VIII. C.)

7) Die Berechnung der drey ersten Glieder mag hier gleichsam zur Probe dienen, u. s. w.

Diese Berechnung, die ich hier nicht abschreiben will, kann man im Buche selbst nachlesen. Ich will dafür einige Bemerkungen über diese Fischerische Behandlung der so verwickelten Aufgabe in eben so viel Nummern beyfügen, als die vorhergehende Darstellung enthält. Die Nummern der Anmerkungen beziehen sich genau auf dieselben Nummern der Darstellung.

1) Aus dem Inhalte der Aufgabe, wie sie hier nach Herrn Fischers § 94. ist vorgetragen worden, erhellet, daß, was Herr Fischer allgemeine Auflösungsmethode, allgemeine Auflösungsreihe nennt, nichts anders sey, als was

sonst

sonst unter dem Namen der Umkehrungsmethode, der Umkehrungsformel für Reihen (Serierum Reversio, Regressus, Regressio) bekannt ist. Will man jene Benennung brauchen, und das durch Umkehrung gefundene x Wurzel der Gleichung (Root of the Equation) nennen: so weiß man nun schon, wie man hier Wurzel nehmen muß, und denkt sich so unter beiden Benennungen nichts Verschiedenes. (Man vergleiche S. 100.)

2) Herr Fischer hat sein Umkehrungsschema eben so allgemein ausgedrückt, als solches Herr Hindenburg angegeben α), das erste Glied x^m ausgenommen, für dessen Coefficienten er die Einheit annimmt. Herr Fischer erinnert (§. 93. S. 67.) er habe das um mehrerer Einfachheit willen, bey Auflösung des Problems, gethan. Das mag seyn, und kann ohne Nachtheil geschehen. Aber bey Darstellung des gelößten Problems wäre es doch besser gewesen, die Abmessungen wieder durch A, einen Coefficienten von x^m, zu ergänzen. Dadurch wäre auch die Nachweisung §. 96. erspart worden, und nichts ist ja leichter, als einen Buchstaben in einer Formel, wenn es nöthig ist, für Eins anzunehmen. Eben so hat Herr Fischer auch das erwogen, was

α) Proposita aequatione

$$z^\pi = ay^\mu + by^{\mu+\delta} + cy^{\mu+2\delta} + dy^{\mu+3\delta} + \text{etc.}$$

quaeritur Dignitas y^ϱ expressa per z. Nov. Syst. Comb. p. XXIX. Auch diese Allgemeinheit schreibt Herr Fischer auf seine Rechnung: „Wir werden dennoch die Allgemeinheit, „wo möglich, noch weiter treiben, und zeigen, wie man mit „gleicher Leichtigkeit, x selbst, oder irgend eine Potenz davon, „x^t (was auch t seyn mag) finden könne — dadurch wird „man jede erdenkliche Function von x finden können." Ferner: „Die Allgemeinheit, welche wir in den Exponenten gelassen „haben, erspart uns theils manche verdrüßliche Reduction — „theils erleichtert diese Unbestimmtheit die Anwendung unserer „Auflösungsmethode." Fischer §. 93. S. 66. 67.

was Herr Hindenburg beybringt, bey der Umkehrung nicht blos x, sondern eine unbestimmte Potenz davon, x^t, zu suchen. (S. Note α) Den Werth von x^t in y drückt Herr Fischer, nach de Moivre, in willkührlich angenommenen Coefficienten α, β, γ, δ.... und zugehörigen Potenzen von y aus, so, daß die y^α, y^β, y^γ.... der obigen (S. 128.) allgemeinen Umkehrungsreihe, hier mit $y^{\frac{t}{m}}$, $y^{\frac{t+r}{m}}$, $y^{\frac{t+2r}{m}}$.... übereinkommen; und so wie Herr Hindenburg, bey Auflösung der Aufgabe und Darstellung des Werthes seiner willkührlichen Coefficienten $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$.... Combinationszeichen braucht, eben so braucht Herr Fischer, zu eben der Absicht, Dimensionszeichen.

3) Von den beiden oben (S. 129. 130.) erwähnten Formen zu Bestimmung der willkührlich angenommenen Coefficienten, hat Herr Fischer, wie die (in 3.) dargestellten Gleichungen, und ihre Vergleichung mit S. 130. (Verfahren 2.) deutlich zu erkennen geben, wohlbedächtig nicht die verwickeltere Moivrische, sondern die einfachere Hindenburgische (S. 130.) Form gewählt. Es ist immer sonderbar, daß Herr Fischer die, nach de Moivres Beyspiele, durch willkührliche Coefficienten ausgedrückte Umkehrungsreihe $x^t = y^{\frac{t}{m}} + \alpha y^{\frac{t+r}{m}} +$ ꝛc. nicht nach der allgemein bekannten currenten Moivrischen, sondern nach der wenig bekannten und sonst nirgends gebrauchten Hindenburgischen Vorschrift benuzt hat. Aber das Fischerische Werk ist voll von dergleichen sonderbaren ganz unerwarteten Erscheinungen und Ereignissen. —

4) Herr Fischer konnte die angenommene Form der Umkehrungsreihe leicht aus Kästners Analysis endlicher Grössen § 690. rechtfertigen; indessen hat er es (in 4.) sehr gut auf so eine Art gethan, die unmittelbar aus der Dar-

stellung (in 3.) fließt, und zugleich zeigt, daß, wenn man die Coefficienten zu einerley Potenz von y nach und nach = 0 sezt, die Coefficienten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$.... sich daraus durch einander bestimmen lassen. Hätte Herr Fischer (nach S. 130.) noch x^t von beiden Seiten abgezogen, alles übrige gelassen, wie es da steht, so würde eben so die Nullsetzung der Coefficienten von einerley Potenzen von y, und dadurch die Bestimmung der Coefficienten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$.... daraus erfolgt seyn. Durch die Beyfügung von $-x^t$ zu beiden Seiten nemlich, wird sogleich die Reihe linker Hand des Gleichheitszeichen gleich Null, also auch die Reihe rechter Hand, und so erfolgt alles, wie bereits gesagt worden ist.

5) Herr Fischer legt die (aus 4.) hergeleiteten Gleichungen für die ersten drey Coefficienten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, (in 5.) vor, und erinnert, man übersehe daraus sehr leicht, wie diese Ausdrücke für die Werthe der übrigen Coefficienten $\dot{\delta}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\zeta}$.... fortschreiten. Wenn auch das Fortschreitungsgesetz nicht jedem Leser klar einleuchten sollte, so ist doch so viel gewiß, daß man die angefangene Darstellung (in 3.) so weit fortsetzen kann, als man will, und daß man dadurch mit Zuziehung (von 4.) soviel von diesen Coefficienten hintereinander, ihren Werthen nach, finden und (in 5.) ausdrücken kann, als man immer verlangt.

6) Was Herr Fischer von de Moivres Auflösung des Problems für m = r = t = 1 berichtet, kann blos darauf bezogen werden, daß de Moivre zuerst die Coefficienten der Umkehrungsreihe durch einander ausgedrückt hat; denn aus 3) weiß man nun schon, daß die Fischerischen Formeln dieser Coefficienten, nicht die Moivrischen, sondern die Hindenburgischen sind. Auch hat de Moivre die Auflösung bey seiner Doppelreihe gezeigt, (S. 131.) woraus aber die Auflösung, wie man sie für eine einfache Reihe braucht, hergeleitet werden kann. Die Bestimmung des Werthes

der

was Herr Hindenburg beybringt, bey der Umkehrung nicht blos x, sondern eine unbestimmte Potenz davon, x^t, zu suchen. (S. Note α) Den Werth von x^t in y drückt Herr Fischer, nach de Moivre, in willkührlich angenommenen Coefficienten α, β, γ, δ.... und zugehörigen Potenzen von y aus, so, daß die y^α, y^β, y^γ.... der obigen (S. 128.) allgemeinen Umkehrungsreihe, hier mit $y^{\frac{t}{m}}$, $y^{\frac{t+r}{m}}$, $y^{\frac{t+2r}{m}}$.... übereinkommen; und so wie Herr Hindenburg, bey Auflösung der Aufgabe und Darstellung des Werthes seiner willkührlichen Coefficienten $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$... Combinationszeichen braucht, eben so braucht Herr Fischer zu eben der Absicht, Dimensionszeichen.

3) Von den beiden oben (S. 129. 130.) erwähnten For-men zu Bestimmung der willkührlich angenommenen Coeffi-cienten, hat Herr Fischer, wie die (in 3.) dargestellten Glei-chungen, und ihre Vergleichung mit S. 130. (Verfahren a) deutlich zu erkennen geben, wohlbedächtig nicht die ver-wickeltere Moivrische, sondern die einfachere Hindenburgische (S. 130.) Form gewählt. Es ist immer sonderbar, daß Herr Fischer die, nach de Moivres Beyspiele, durch will-kührliche Coefficienten ausgedrückte Umkehrungsreihe $x^t = y^{\frac{t}{m}} + \alpha y^{\frac{t+r}{m}} +$ ꝛc. nicht nach der allgemein bekann[ten] currenten Moivrischen, sondern nach der wenig bekann[ten] und sonst nirgends gebrauchten Hindenburgischen Vorsch[rift] benuzt hat. Aber das Fischerisch[e] [...] ist voll von [...]chen sonderbaren ganz unerw[...] Erscheinun[gen] Ereignissen.

4) Herr Fischer kon[...] [...]enom[...] Umkehrungsreihe leich[...] Grössen § 690. recht[...] gut auf so eine Art [...]

ohne allen Vergleich viel leichter, als das Verfahren nach 1. wie auch Herr Hindenburg am angeführten Orte p. XXXI. ausdrücklich erinnert hat.

Das Umkehrungsverfahren nach 1. ist zuerst von de Moivre gebraucht worden, um zu zeigen, wie man, wenn

$$az + bz^2 + cz^3 + \text{etc.} = gy^1 + hy^2 + iy^3 + \text{etc.} \quad (P)$$

gegeben ist, z durch y, oder y durch z, vermittelst der willkührlich angenommenen Gleichungen

$$z = \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 + \text{etc.}$$

$$y = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \dot{\mathfrak{D}}z^4 + \text{etc.}$$

durch Substitution nemlich der Werthe der Potenzen von z oder y dieser Gleichungen in die gegebene Gleichung, um die willkührlich angenommenen Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$.... oder $\dot{A}$, $\dot{B}$.... dadurch zu bestimmen [qr]), finden könne. Von da hat man das Verfahren weiter auch auf den Fall angewendet, wenn (wie in I.) statt der einen Reihe nur eine einzige variable Grösse steht, wie Haussen, v. Tempelhof, Karsten [rs]) und andere gethan haben. Man kann also das Verfahren nach 1. das Moivrische nennen. Das Verfahren nach 2. mag das Hindenburgische heissen,

J 2 um

qr) Dies ist Moivres ausdrückliche Vorschrift, womit er den Beweis seines Theorems anfängt, nach welchem er z durch y ausdrückt: Suppose $z = Ay + By^2 + Cy^3 +$ etc. substitute this Series in the room of z, and the Powers of this Series, in the room of the Powers of z etc. in die Stellen nemlich von z, z^2, z^3.... der gegebenen Gleichung (P) Phil. Trans. Vol. XX. Art. X. p. 191.

rs) Hausen Elem. Mathes. p. 173. 6. Tempelhof Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, §. 808. wo die dortige Reihe auf die allgemeinere (§. 804.) bezogen wird, in welcher aber die angenommene Umkehrungsformel auf die Moivrische Art gebraucht wird. Karstens Anfangsgründe der mathematischen Analysis, §. 264.

der willkührlich angenommenen Coefficienten vermittelst dieser Formeln, so, daß jeder durch sich selbst, und unabhängig von allen vorhergehenden ausgedrückt werde, führt gleichwohl zu den verdrüßlichsten Substitutionen und daher erfolgenden ermüdendsten Rechnungen; und wenn Herr Fischer erinnert, daß das Resultat dieser Rechnungen, ohne den Gebrauch der Dimensionszeichen, so gut als unausführbar seyn möchte: so legt er dadurch das feyerlichste Bekenntniß ab, daß er aus eigenen Kräften, ohne fremde Beyhülfe, hier nichts vermocht haben würde.

7) Da sich der Werth des ersten Coefficientens $\overset{\circ}{\alpha}$ ohne alle Rechnung (aus 5.) ergiebt: so hat Herr Fischer, um einen Begriff von dem höchst beschwerlichen Calcul der übrigen zu geben, die Berechnung des zweyten und dritten Coefficientens $\overset{\circ}{\beta}$ und $\overset{\circ}{\gamma}$, gleichsam zur Probe (S. 70. 71.) in Extenso vorgelegt, die doch bey weiten nicht so verwickelt ist, als die der folgenden Coefficienten $\overset{\circ}{\delta}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\zeta}$.... wo die Schwierigkeit ausserordentlich zunimmt. Unangenehme Weitläuftigkeiten, indem man viel Glieder berechnen muß, die in der Folge mit andern sich aufheben oder verkürzen, gesellen sich zu verwickelten Reductionen von zusammengesezten Ausdrücken, worin niedrigere Dimensionsordnungen vorkommen, auf einfachere, die höhere Dimensionsordnungen enthalten, und diese Reductionen führen auf vielgliedrige, aus den Exponenten zusammengesezte, Summen, deren Factoren man suchen muß. So schwierig auch das leztere bey sehr vielgliedrigen Summen aus mehrern Factoren werden kann: so sind dennoch die Reductionen der Dimensionsordnungen auf einander hierbey das Hauptwerk; und es gehört immer ein glücklicher Einfall oder sonst eine Veranlassung dazu, darauf zu fallen β). Auch würde es für mehrere

β) Herr Fischer hat nicht angegeben, wie er darauf gekommen sey, oder was ihn veranlaßt habe, ein so leichtes Gesetz nur zu ver-

mehrere Leser nicht überflüssig gewesen seyn, wie höhere Ordnungen hier aus mehrern niedrigern zusammenzusetzen, in einer Formel nachgewiesen zu haben, weil doch die Berechnung mehrerer Coefficienten nicht selbst vorgelegt werden konnte.

Herr Fischer erinnert, die Rechnung für $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, sey noch erträglich, die Berechnung von $\dot{\delta}$ erfordere schon Geduld, und, wenn man noch weiter gehen will, Eigensinn. Dennoch habe er die Hartnäckigkeit gehabt, die Rechnung allgemein bis zum sechsten Coefficienten $\dot{\zeta}$ und für den besondern Fall $m = r = t = 1$, bis zum achten Coefficienten $\dot{\vartheta}$ zu treiben, und so die Formel zu finden, wie sie in (der Fischerischen) Tafel III. A. oder hier Tafel VIII. C. steht.

Diese

muthen; wie doch Herr Hindenburg dergleichen voraussagte, sobald er wahrgenommen, daß die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 ... der Buchstaben a, b, c, d, e ... in den beiden Newtonischen Umkehrungsexempeln (Note vw) die Nummern 2, 4, 6, 8 ... successive in den Coefficienten gaben. Daß Moivre die Beschwerlichkeit seiner Umkehrungsformel gekannt hat, ist ganz gewiß. Wahrscheinlicherweise hat er eine Abkürzung derselben, durch unmittelbare Darstellung der gegebenen Coefficienten und Exponenten, für unmöglich gehalten, wie ihn doch die Newtonischen Exempel überführen konnten; denn daß man Buchstaben auf Zahlen mit grossen Nutzen beziehen kann, wußte er sehr wohl, und sein mehrmals angeführtes Combinationsgesetz bezeugt es deutlich. Hätte also de Moivre nur die geringste Vermuthung davon gehabt, er würde keine Mühe gespart haben, seine recurrirenden Coefficienten weiter aufzulösen, und das beobachtete Fortschreitungsgesetz eben so wie das alte bekannte, zwar nur **wörtlich**, aber doch **deutlich**, zu beschreiben. Die combinatorischen Zeichen würden dann wieder dazu gedient haben, den weitschweifigen wörtlichen Vortrag kurz und faßlich darzustellen. Auch Herr Magister Eschenbach versuchte nicht eher, als nach einer festen Ueberzeugung der Möglichkeit eines guten Erfolgs, die so beschwerliche Reduction.

Diese Formel nun, auf die simpelsten Elemente, gegebene Coefficienten und Exponenten, zurückgeführt, ist über alle Erwartung einfach und für die Anwendung geschmeidig. Das leichte Gesetz, das sie befolgt, stützt sich freylich nur, wie auch ausdrücklich erinnert wird, auf blosse unvollständige Induction; aber Herr Fischer hofft, daß ihm nicht vor dem Richterstuhle der Critik über die Entdeckung des Gesetzes einer so wichtigen Reihe, der Proceß gemacht werden wird, weil er nicht so glücklich gewesen, einen vollständigen Beweis dieses Gesetzes zugleich zu finden. Nach dieser so feyerlichen Erklärung sezt Herr Fischer den ganzen Inhalt seiner Schrift zur Bürgschaft für die Richtigkeit und Allgemeingültigkeit seiner Formel ein.

Ich weiß nicht, wie das mathematische Publikum in Absicht auf die angebotene Bürgschaft gesinnet ist; aber darauf kann sich Herr Fischer sicher verlassen, daß eine gerechte Critik nicht eher, als nach einer genauen Einsicht aller Aktenstücke, das Urtheil sprechen wird.

Und hier folgt nun das lezte schon oft genannte Aktenstück, dessen Herr Fischer, ich kann nicht sagen warum, auch nicht mit einer Sylbe Erwähnung gethan hat: das drey volle Jahre vor Herausgabe des Fischerischen Werks im Publikum erschienene und mit verdientem Beyfalle aufgenommene Eschenbachische Specimen de Serierum Reversione, formulis analytico-combinatoriis exhibita; eine von Herrn Eschenbach am 30sten May 1789. vertheidigte Disputation, in welcher (§. VII. p. 23—25. auch hier Tafel VIII. A) eine Formel befindlich ist, die mit der Fischerischen allgemeinen Auflösungs- oder Umkehrungsreihe vollkommen übereinstimmt v).

Ein

v) Davon kann man sich überzeugen, wenn man die Eschenbachische Formel (hier Tafel VIII. A.) nach der (Ebend. D.) Reductionsscale auf Fischerische Zeichen bringt, wo man vollkommen die Fischerische Formel erhält.

Ein Umstand, der alle Aufmerksamkeit erregt, und durch Herrn Fischers tiefes Stillschweigen noch bedeutender wird. Es ist unmöglich, daß ihm die Eschenbachische Schrift, zumal zu der Zeit, da er eben mit Untersuchungen dieser Art, wie er selbst vorgiebt, beschäftigt war, und in Berlin, wo man an gelehrten Neuigkeiten keinen Mangel hat, sollte unbekannt geblieben seyn δ); und so entsteht die grosse Frage: ob nicht vielleicht Herr Fischer die eiserne Geduld und eigensinnige Hartnäckigkeit bey Durchsetzung so unerträglich beschwerlicher Rechnungen, blos dahin verwendet hat, die Richtigkeit der Eschenbachischen Formel für die ersten sechs bis acht Glieder nur zu prüfen? Freylich fiele dadurch alle zweyte oder Nebenerfindung von Herrn Fischers Seite ganz weg. Das Publikum ist aber hierbey im geringsten nicht interessirt, da die Eschenbachische Formel in den ausdruckvollen combinatorischen Zeichen das Gesetz des Fortganges weit anschaulicher darstellt, als die Fischerische, wo ein Theil jener Zeichen aufgelößt, und mit Dimensionszeichen verbunden ist, und da, das Einzige, was man bey der

δ) Vortheilhafte Recensionen dieser Schrift findet man, ausser den Leipziger gelehrten Zeitungen, auch in andern, z. B. den allgemein gelesenen Göttingischen gelehrten Anzeigen und der allgemeinen Litteraturzeitung. Auch fällt bey ihr das Hinderniß anderer akademischen Abhandlungen und Dissertationen, daß man sie nicht bequem haben kann, weg, weil diese Schrift ihrer Wichtigkeit wegen nachher, mit noch zwey andern desselben Verfassers, in den Buchhandel gekommen ist, und auch daher im nächsten Meßcatalogus von 1789. Seite 220. unter dem Titel: Eschenbachii, H. C. G. Specimina I) de Serierum reversione formulis analytico-combinat. II) de multipli angulor. tangentibus. III) Resolutio problematis geographici, cet. 4. Lipsiae, in bibliopolio heredum Mülleri; aufgeführt, folglich so gut wie jedes andere Buch, auf denselben Wegen, bekannt geworden ist.

der Eschenbachischen Formel noch vermißt, die blos auf unvollständige Induction sich stüzt — ein strenger Beweis der Allgemeingültigkeit der Formel — wobey allein noch Dank zu verdienen war, von Herrn Fischer nicht ist beygebracht worden.

Hier ist eine getreue, gedrängte Relation aus den vorliegenden vollständigen Akten.

a) Herr Hindenburg verlangt, die vorgelegte Reihe der Umkehrungsaufgabe soll, in Absicht auf die Exponenten allgemein, und was man durch Umkehrung zu finden sucht, eine unbestimmte Potenz der veränderlichen Grösse seyn. (Nov. Syst. Comb. p. XXIX. Eben auf die Art ist das Fischerische allgemeine Umkehrungsschema (§. 94.) ausgedrückt, auch sucht er nicht x, sondern x^t zu bestimmen.

b) Herr Hindenburg hat zuerst das Moivrische Umkehrungsverfahren, wie es Hausen, Karsten u. a. auch auf einzelne Reihen angewendet haben, in Combinationszeichen ausgedrückt, (Ebend. p. XXX.) auch ein anderes bequemeres Verfahren dafür angewiesen. (Ebend. p. XXXI.) Herr Fischer drückt die Umkehrungsformel anfänglich nach de Moivre aus, wendet sie aber nachher nach dem Hindenburgischen Verfahren an, und bedient sich dabey der Dimensionszeichen. (§. 94. S. 67. 69.)

c) Herr Eschenbach hat Herrn Hindenburgs Behauptung (Ebendas. p. XXXI. Exhiberi etc.) bestätiget, und eine Formel, blos durch gegebene Coefficienten und Exponenten ausgedrückt, aufgestellt, die ein sehr leichtes Gesetz befolgt, sich aber nur auf eine unvollständige Induction stüzt, ohne allen Beweis (de Serier. Reverſ. §. VII. p. 23 bis 25.) Drey Jahre nachher bringt Herr Fischer, ohne weitere Veranlassung dafür anzugeben, dieselbe Formel, dasselbe Gesetz befolgend, auf dieselbe Induction gestüzt, auch ohne allen Beweis zum Vorschein. (§. 94. S. 67. 68. und Tafel III. A.)

Herr

Herr Eschenbach nennt obige Formel die seinige. (de Ser. Rev. p. 4.) Eben das thut auch Herr Fischer an mehrern Orten (Vorrede S. III. §. 90. S. 60. §. 95. S. 72. §. 99. S. 73 2c.) *).

Und so mag denn nun die von Herrn Fischer selbst (§. 95.) in Anregung gebrachte Critik ihr gerechtes aber strenges Urtheil fällen!

Ich habe gleich anfangs erinnert, Herrn Fischers Benehmen in seinem Werke sey einzig in seiner Art, und ich muß gestehen, daß mir ein ähnliches Beyspiel, wo ein Schriftsteller von einem andern so viel entlehnt, übersezt, abgeschrieben hat, das er Alles ganz dreist für sein Eigenthum ausgiebt, nicht vorgekommen ist. Herr Fischer wird doch nicht glauben, oder seine Leser im Ernste bereden wollen, als habe er, durch blosse unbedeutende Umprägung der Worte und Begriffe, (S. 34. 35.) aber noch vielmehr durch blosse Umformung der Zeichen: (S. 53 — 56. S. 62 — 64.) durch Umsetzung der Buchstaben in römische Zahlen; durch Erhöhung (wo noch Buchstaben gebraucht werden) der Local- und Summenwerthe dieser Buchstaben; durch Versetzung des Summenexponentens von oben linker Hand der grossen Buchstaben, gerade über die Buchstaben, oder römischen Zahlen; überhaupt, durch Substitution anscheinend neuer, aber blos neugeformter, nicht immer richtig gezeichneter und zweckmässig genug gebrauchter willkührlicher Zeichen, an die Stelle der von Herrn Hindenburg in

die

*) Herr Eschenbach hat auch (Seier. Reverf. §. VIII.) eine Auflösung der Aufgabe, wenn zwey Reihen gegeben sind, mitgetheilt, und hat in so fern mehr geleistet, als Herr Fischer. Da aber seine beiden Reihen in Absicht auf ihre Exponenten noch beschränkt, nicht ganz allgemein sind: so hat vermuthlich Herr Fischer so etwas noch eingeschränktes nicht nachmachen wollen; und daran hat er auch ganz wohl gethan.

die Analysis bereits eingeführten, ganz einfachen, genau bestimmten und im Gebrauch äusserst bequem befundenen, ursprünglichen Combinationszeichen und Begriffe — als habe er durch dergleichen unbedeutende Umprägung und Umformung etwas Neues oder Besseres geschafft. Das möchte aber gleichwohl Alles noch hingehn, wenn nur nicht Herr Fischer, auf eine höchst undankbare Art, um nicht mehr zu sagen, die Quelle in üblen Ruf zu bringen und für Andere gleichsam zu vergiften gesucht hätte ς), die ihn doch so wohlthätig getränkt und so herzlich gestärkt hat, die grosse Reise in die für ihn sonst unzugängliche fruchtbare Provinz des weit ausgedehnten Landes der Reihen zu unternehmen — so weit selbige blossen Dimensionspässen offen steht, da eigentlich alles hier combinatorischen Gewalten untergeordnet ist.

XIV.

ς) Herr Fischer sagt ausdrücklich in der Vorrede (S. V.) Es dürfte vielleicht, die einzige einfache und leichte Bezeichnungsart, deren er sich in seinem Werke bedient habe, zu Auflösung aller der Probleme leiten können, die in dem Hindenburgischen Entwurfe (Nov. Syst. Comb. p. XXVI — XXXII.) wirklich auflösbar seyn möchten. Die beschränkten Dimensionszeichen sollten also weiter reichen, als die viel mehr umfassenden Combinationszeichen? und was meynt wohl Herr Fischer mit seiner einzigen einfachen und leichten Bezeichnungsart? Wir kennen keine andere, als die von Herrn Hindenburg entlehnte und absichtlich von ihm verstellte fehlerhafte Bezeichnung seiner Dimensionszeichen (S. 54. 2, 3, 4.) Von dem Nachtheil, der aus den doppelten Dimensionszeichen (römischen Zahlen und deutschen Buchstaben) erwächst, sehe man S. 57. 58.

XIV.

Ungefähre Berechnung des baaren Verlustes, welcher den Lesern, die sich durch Herrn Fischers Schrift in der Sache unterrichten wollen, daraus erwächst, daß Herr Fischer geflissentlich sich stellt, als sey ihm von Herrn Hindenburgs Combinationsmethode, von seinen dahin gehörigen Zeichen und Formeln, vorher nichts bekannt gewesen. Schon allein dadurch, um diesen Schein nach Möglichkeit zu behaupten und sich nicht zu sehr zu verrathen, hat er nur das unumgänglich Nothwendige, die Dimensionszeichen und die sie enthaltenden Haupt- und Grundformeln, entlehnen können, alles andere aber ungenuzt vorbeygehen und liegen lassen müssen.

Der Umstand, daß Herr Fischer sich das Ansehen hat geben wollen, als habe er alles aus sich selbst erfunden, habe Herrn Hindenburgs combinatorisch-analytische Schriften erst späterhin kennen lernen, nachdem er bereits alles zuvor aufs reine gebracht gehabt, hat einen doppelten sehr grossen Nachtheil für seine Leser.

Dahin gehören:

1) Dunkelheit und Beschränktheit seiner Theorie, indem er den combinatorischen ursprünglichen Quell, aus welchem alles fließt, so viel als möglich zu verdecken gesucht, nichts von den ersten Combinationsbegriffen und einfachsten Operationen entwickelt hat, ja darin sogar so weit gegangen ist, nicht einmal die combinatorische Zerfällung zu bestimmten

ten Summen anzuweisen, worauf doch der Gebrauch seiner Dimensionszeichen sich einzig und allein stüzt und bezieht.

2) Mangel an Simplicität, an harmonischer überhaupt lebendiger Darstellung der Resultate, aus den Zusammentreffen mehrerer, gut gewählter und sprechender Zeichen, dergleichen die Hindenburgischen sind. Herr Fischer hat freylich nur auf das unumgänglich Nothwendige sich einschränken müssen, ohne welches er gar nichts hätte thun können, auf die Dimensionszeichen, die er noch dazu, um sie weniger kenntlich zu machen, verzeichnet hat. (S. 54. 4.) Alle übrige Hindenburgische Zeichen mußte er liegen lassen, aus der sehr gegründeten Bedenklichkeit, sie möchten, zumal in Verbindung mit jenen unvermeidlichen Dimensionszeichen, (bey diesen mußte er sich nun einmal den Erfolg gefallen lassen) eben so viel Verräther an ihm werden. Aber dafür hat er auch sich und seine Leser um die Vortheile gebracht, die eine solche Darstellung gewährt, hat sich selbst die Aussicht verbaut, die ihn zu neuen Entdeckungen hätte führen können.

Wie dunkel die Fischerische Dimensionstheorie (erster und zweyter Abschnitt) gegen die Hindenburgische combinatorische Darstellung bleibt, zeigt die unmittelbare Vergleichung sogleich. Wenn man sich zuvor mit den beiden combinatorischen Operationen: Gegebene Dinge a, b, c, d.... nach zwey, drey, vier, und mehrern Dingen, an sich, oder zu bestimmten Summen, zu combiniren, nebst den zugehörigen Zeichen, bekannt gemacht hat, so ist die Anwendung auf die Potenzen der Reihen äusserst leicht, die immer dunkel bleibt, wenn man diese Operationen nicht gehörig kennt. Eben so verhält es sich mit den beiden Variationsoperationen für gegebene Dinge, an sich, oder zu bestimmten Summen, wenn man Anwendung davon auf Producte ungleicher Reihen oder Factoren machen will; wo

aber

aber die Fischerische Ausführung der Sache sehr mangelhaft ausgefallen ist. (S. 64.)

Die Beschränktheit der Fischerischen Theorie und Anwendung der Dimensionszeichen, gegen die Hindenburgische combinatorische Analytik, erhellet schon daraus, daß das ganze Fischerische Werk nichts weiter als Anwendung einer einzigen Aufgabe aus dem unermeßlichen Ocean combinatorischer Verwickelungen ist; der Aufgabe nemlich, wie sie Herr Hindenburg bezeichnet: Rerum datarum, admissis repetitionibus, quaerere Combinationes numeri dati siue propositi, (S. 46. Note gg) oder, wie er sie auch sonst aufführt, in so fern man sich die Summe als gegeben denkt: Sectiones quaerere numeri dati, admissis repetitionibus. Eine ähnliche Aufgabe über die Variationes zu vorgeschriebenen Summen, mit Wiederholungen, hat Herr Fischer (§. 265 — 275.) zwar auch versucht, aber nur auf zwey Beyspiele! angewendet, und überhaupt davon so gut als Nichts gesagt, wie man gleich daraus abnehmen kann, daß man (was doch Herr Fischer bey den Potenzen nach der ersten Aufgabe gethan hat) dort vergeblich nach Ausdrücken für allgemeine Glieder sich umsieht, wie solche Herr Hindenburg für Producte von 2, 3, 4, 5...m Reihen angegeben hat n). Man vergleiche hiermit das oben (S. 63. 64.) gesagte,

n) In einer eigenen Tafel: Serierum in Series Multiplicatio. Nov. Syst. Combin. p. LXIX — LXXVI. Hierbey will ich einen Druckfehler verbessern, der dort p. LXXVI. D. 8. sich findet, wo in drey Zeilen M statt N gesezt werden muß, nemlich:

$$\ldots\mathrm{tsrqp}\,]\,\mathrm{n} = {}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}-1}\overset{\ldots\mathrm{srqp}}{M}_{\mathrm{z}\,\mu+\nu+\pi+\sigma+\tau\,\ldots\,+(\mathrm{n}-1)\delta}$$

$$\ldots\ldots\mathrm{trsqp} = \Big[\,{}^{\mathrm{m}}\overset{..\mathrm{srqp}}{M} + {}^{\mathrm{m}+1}\overset{..\mathrm{srqp}}{M}_{\mathrm{z}\,\delta} + {}^{\mathrm{m}+2}\overset{..\mathrm{srqp}}{M}_{\mathrm{z}\,2\delta} + \ldots\ldots$$

$${}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}-1}\overset{..\mathrm{srqp}}{M}_{\mathrm{z}\,(\mathrm{n}-1)\delta}\Big]_{\mathrm{z}\,\Omega}$$

$$\overset{\ldots\mathrm{tsrqp}}{M} = \overset{\mathrm{p}}{A},\ \overset{\mathrm{qp}}{B},\ \overset{\mathrm{rqp}}{C},\ \overset{\mathrm{srqp}}{D}$$

sagte, wo auch die Ursache angegeben worden, warum Herr Fischer hier so weit zurückgeblieben ist.

Leser des Fischerischen Werks, die nichts von der combinatorischen Analytik wissen, werden freylich erstaunen, wenn sie sehen, wie weit der Gebrauch der Dimensionszeichen sich erstreckt, und was schon durch ihre Vermittelung möglich ist. Dabey werden sie nicht wähnen, daß es Zeichen giebt, die eben dasselbe, und noch viel mehr, ungleich vortheilhafter ausdrücken und darstellen; noch weniger aber auch nur im Traume sich einfallen lassen, daß das, womit Herr Fischer sie bekannt gemacht hat, nur ein Ast eines grossen Baumes sey, der sich in drey starke Hauptstämme und jeder wieder in mehrere Aerme und Aeste verbreitet. Da Herr Fischer, dem das aus den Hindenburgischen Schriften gar wohl bekannt ist, seinen Lesern auch nicht die geringste Notiz davon gegeben hat, so scheint es fast, als habe er mit gutem Vorbedacht ihnen die Binde nicht von den Augen nehmen wollen.

Was also Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen, was Combinationen und Variationen an sich, mit und ohne Wiederholungen, was Permutationen und Permixtionen u. s. w. sind, wie sie dargestellt werden und welchen Gebrauch sie in der Analysis haben; von cyklischen Perioden und ihrem Einfluß auf die Diophantische oder unbestimmte Analytik [9]), wie das unermeßliche Reich der Variationen, nach dem Gebrauche, den man seit undenklichen Zeiten davon gemacht hat, in zwey grosse Hauptabtheilungen zerfalle.

1) Der Zahlenordnung durch Ziffern, oder andere stellvertretende Zeichen, deren Nutzen über die ganze gemeine

[9]) Leipziger Magazin der reinen und angewandten Mathematik. 1786. S. 281 — 325.

meine Arithmetik mit ihren Zahlensystemen und über das grosse Gebiete der Analysis sich verbreitet, und

2) Der alphabetischen Ordnung durch Buchstaben, die sich gleichsam in sich selbst begränzt.

Wie und wodurch beiderley Variationen wesentlich von einander verschieden, und worin sie mit einander übereinkommen; wo ihre Gränzen in einander schwimmen; ob es einen Algorithmus der leztern gebe, wie er aussehe, und wie dadurch eine auf die andere reducirt werden könne? — von allen diesen Dingen, wovon Herr Hindenburg theils bereits Auskunft gegeben, theils Anzeige gethan, (und worüber er sich in seinem grössern Werke ausführlicher erklären wird) erfahren die Leser der Fischerischen Theorie und Anwendung der Dimensionszeichen nichts. Es geht ihnen mit diesen Zeichen wie den Eskimo's mit ihren Schneeaugen, wodurch sie zwar ungeblendet ihr Gesicht auf grosse Fernen erstrecken, aber nur nach solchen Richtungen vor sich hinsehen können, wie ihnen die Oeffnung des Schlitzes verstattet.

Da nun aber doch einmal Herr Fischer in seinem Werke über die Anwendung der combinatorischen Discerptionsaufgabe zu bestimmten Summen sich so weit ausgebreitet hat, so hätte er doch auch die so nahe damit verwandte Aufgabe der Combinationen an sich, und ihre so ausgedehnte Anwendung in der Analysis, nicht mit Stillschweigen vorbeygehen, sondern ihren Gebrauch, wenigstens in einigen Beyspielen, zeigen sollen; wozu die von ihm § 5. und 7. ingleichen §. 49. und 50. berührten Aufgaben der Potenzen von $A + B + C + D +$ ꝛc. die nächste Veranlassung gaben. Dadurch würde Herr Fischer die oben (S. 37.) gerügte Widersprüche vermieden haben. Dagegen begnügt er sich, seine Leser (§. 50. am Ende) zu versichern: die so beschwerliche Uebersetzung (seiner Zeichen) bey höhern Potenzen habe ihren Grund in der Natur der Sache, und könne durch keine

Methode

Methode gehoben werden. Der wahre Grund der anscheinend schwierigen Verwickelung liegt aber blos in einer fehlerhaften Anwendung, indem Herr Fischer auch hier seine Dimensionszeichen zu Auslegern bestellt, da er vielmehr dieses Geschäft ihren ältern Brüdern (für die aber Herr Fischer keine Namen, und folglich auch keine Zeichen hat) hätte auftragen sollen.

Gesezt nun, es wollte Jemand, um sich in der Anwendung der Fischerischen Dimensionszeichen festzusetzen, das an sich gar nicht verwickelte Exempel

$$(a + b + c + d + e + f)^6$$

vornehmen, nach der Vorschrift zu lösen, und würde nun da durch solche verdrüßliche Uebersetzungen überall aufgehalten. Was würde er sich wohl von den gerühmten Nutzen dieser Zeichen für einen Begriff machen? und würde er dadurch getröstet seyn, wenn ihm gesagt würde, die Schwierigkeit liege hier in der Natur der Sache, und könne durch keine Methode gehoben werden. Ich glaube vielmehr, er würde das weitere Studium des Gebrauchs dieser Zeichen einstweilen aufgeben.

Nach Herrn Hindenburg hingegen, ist in seiner ausdrucksvollen combinatorischen Zeichensprache der generelle Fall.

1) für ein ganzes positives n

$$\left(a + b + c + d + e + f + g + \ldots + \overset{m-1}{a}\right)^n = \overset{n'\mathfrak{N}}{\left(a, b, c \ldots \overset{m-1}{a}\right)}$$

wo auch

$$\overset{n'\mathfrak{N}}{\left(a, b, c, \ldots \overset{m-1}{a}\right)} = a^n + a^{n-1} a'A + a^{n-2} b'B + a^{n-3} c'C + \text{etc.}$$

$$\left(b, \; c, \; d, \; e, \; f \ldots . \overset{m-2}{b}\right)$$

welches in Worten also lautet: Von einem mgliedrigen Ausdrucke $a + b + c +$ etc. die Potenz des ganzen positiven Exponentens n zu machen, schreibe man von den m Dingen die nte Combinationsclasse, und setze jedem

Gliede

Gliede derselben die zugehörige Versetzungszahl als Unze oder Polynomialcoefficienten vor. So leicht aber in der Arithmetik das Numeriren ist, eben so leicht ist in der Combinationslehre die Regel, von m Dingen die nte Classe zu schreiben, und man kann so die Glieder, ohne alles Umsetzen der Dimensionszeichen (dergleichen hier gar nicht vorkommen, noch nöthig sind) sogleich hin schreiben *).

Eben der generelle Fall, wo

2) der Exponent n jede Zahl seyn kann, giebt

$$\left(a+b+c+d+e+\ldots+\overset{m-1}{a}\right)^n = a^n + {}^{n}\mathfrak{A}a^{n-1}\mathfrak{a}'A + {}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}'B + {}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}'C + {}^{n}\mathfrak{D}a^{n-4}\mathfrak{d}'D + \text{rc.}$$

$$\left(b,\ c,\ d,\ e\ldots\ldots\overset{m-2}{b}\right)$$

Man findet diese Formeln auch hinten (Tafel VII. II. a, b) angemerkt, nebst den Stellen, wo sie in den Hindenburgischen Schriften stehen. Die Indices oder Zeiger der dortigen Formeln haben auch Zahlen über den Buchstaben, weil nemlich nach den zugehörigen Combinationsregeln, die Buchstaben (und so auch die Zahlen oder Ziffern) in solcher Ordnung mit einander verbunden werden, daß die Zahlenwerthe derselben, aus den zugehörigen Ziffern, steigende Zahlen vorstellen. Hier habe ich diese Zahlen oder Ziffern weggelassen, weil sie bey Combinationen an sich (nach der Erinnerung S. 47.) nicht schlechterdings nöthig sind. Die Entwickelung der hier befindlichen zweyten Formel ist vollkommen

*) Wegen der hieher gehörigen Aufgabe Nov. Syst. Comb. p. XIX. 8 — 11. auch vergleiche man die Darstellungen Infin. Dign. p. 17. 18. und die Tafeln p. 157. seq. die Versetzungszahlen, geben ausser den p. 31. 32. angeführten Formeln, die Tafeln p. 162 — 165. oder p. 168. 169. Alles ist hier im Voraus aufs beste vorbereitet. Dergleichen Hülfsmittel entbehren die Leser des Fischerischen Werks.

kommen dieselbe, wie sie Infin. Dign. p. 40 steht; wenn man für den dortigen Exponenten m hier n sezt. Aber die dort gebrauchten Zeichen sind bey weitem nicht so vollkommen, als die hier mitgetheilten, wie sie auch nachher in Nov. Syst. Comb. gebraucht worden. Man vergleiche hier die Note oo Seite 69. 70.

Den Gang, den man nehmen kann, aus den Formeln mit Combinationszeichen für bestimmte Summen, zu den correspondirenden Formeln mit Combinationszeichen für Combinationen an sich zu kommen, (den Uebergang aus den Potenzformeln der einen Art in die der andern) zeigt Infin. Dign. p. 145 — 147. sehr deutlich. Denn die dortige Formel in 3 giebt, für $z = 1$, die Formel in 4, diese giebt, wenn man die Glieder nach $\mathfrak{a}^{m-1}$, $\mathfrak{a}^{m-2}$, $\mathfrak{a}^{m-3}$ rc. ordnet, die dortige Formel in 6, woraus denn, wenn man (Nov. Syst. Comb. p. XLIX. 1.) sezt

$^1A + {}^2A + {}^3A +$ rc. $= {}'A$ und $^2B + {}^3B + {}^4B +$ rc. $= {}'B$

und so weiter die Formel

$\mathfrak{a}^m + {}^m\mathfrak{A}\mathfrak{a}^{m-1}\mathfrak{a}'A + {}^m\mathfrak{B}\mathfrak{a}^{m-2}\mathfrak{b}'B + {}^m\mathfrak{C}\mathfrak{a}^{m-3}\mathfrak{c}'C +$ rc.

folgt, wie sie oben steht. Die Hindenburgische Entwickelung (Infin. Dign. p. 146. 5.) enthält genau das, was Herr Fischer (§. 38.) gegeben hat. Aber welcher Unterschied in der Darstellung! da bey Herrn Hindenburg alles aus der dortigen lichtvollen Formel (in 4.) fließt. Man vergleiche hier die Note m S. 19. 20.

Ich will noch ein Beyspiel ausheben, die Beschränktheit der Fischerischen Theorie mit der Reichhaltigkeit der Hindenburgischen zu vergleichen.

Der erste Paragraf des Fischerischen Werks sagt: das Product von m Reihen giebt alle $m$tionen. Der dritte Paragraf wiederholt das nemliche, wenn alle Reihen einerley sind. Und das ist alles, was Herr Fischer von diesem Hauptbegriffe sagt. Hierbey bleibt unberührt:

1) Das

1) Das Allgemeine der figürlichen Anordnung und Darstellung eines solchen Products im Besonderen vorzulegen; welches die erste und allgemeinste Haupttafel, und gleichsam den Repräsentanten des ganzen Systems giebt.

2) Wie aus dieser Darstellung alle Fundamental- und Specialtafeln abgeleitet werden können, zu zeigen. Z. B. Man ordne die Complexionen dieser ersten Tafel nach bestimmten Summen, so giebt dieses eine zweyte Tafel. Man lasse in beiden Tafeln alle Wiederholungen weg, so hat man eine 3te und 4te Tafel. Die weggelassenen Wiederholungen für sich, geben eine 5te und 6te Tafel. Man lasse wieder in den beiden ersten Tafeln alle Versetzungen weg, so erhält man eine 7te und 8te Tafel. Die weggelassenen Versetzungen geben eine 9te und 10te Tafel. Man lasse in den beiden ersten Tafeln abermals alle Versetzungen und Wiederholungen zusammen weg, so giebt dieses eine 11te und 12te Tafel. Die weggelassenen Versetzungen und Wiederholungen für sich geben eine 13te und 14te Tafel, u. s. w. Diese Tafeln, die man noch auf mehrere Arten modificiren kann, machen gleichsam das allgemeine Magazin combinatorischer und auf die Analysis zu benutzender Verwickelungen und Gesetze aus. Sie sind aber bey weitem nicht alle gleichwichtig. Einige von ihnen sind theils an sich, theils in Verbindung mit figürlichen und andern Zahlen, von unendlichem Gebrauche, andere haben nur einen sehr beschränkten Nutzen, daher nöthig ist, die an sich so grosse nicht zu übersehende Mannichfaltigkeit derselben durch kluge Auswahl des Brauchbarsten einzuschränken.

3) Wie man jede Classe der einzelnen Tafeln, (die man nun für sich, und nicht weiter als abhängig von andern Tafeln betrachtet) theils von vorhergehenden Classen ableiten, theils an sich independent von andern darstellen könne. Eben das gilt auch von den verticalen Reihen jeder nach figürlicher Anordnung (S. 48. 7.) dargestellten Classe.

4) Wie

4) Wie man jede einzelne nach ihrer Ordnungszahl angegebene Complexion, ausser der Ordnung darstellen, und umgekehrt, einer einzeln dargestellten Complexion Ordnungszahl in der Classe angeben könne.

5) Wie viel in jeder Classe Complexionen, wie viel in jeder Verticalreihe, wie viel ihrer in allen Classen in jeder Tafel zusammen sind, u. s. w.

Das mag einerseits zeigen, wie unerschöpflich ein solcher combinatorischer Hauptbegriff ist, und wie reichhaltig etwa das System seyn mag, dem lauter solche Begriffe zum Grunde liegen; andererseits kann man daraus abnehmen, daß die Leser der Fischerischen Theorie einen solchen fruchtbaren überall auf bestimmte und entwickelte Begriffe ausgehenden Vortrag entbehren.

So viel von dem, was die Materie und den Umfang beider Werke anbetrift; noch muß ich etwas von ihrer Form in Ansehung der Zeichen und den durch sie bewürkten Vortrag in der Kürze beybringen.

Sollte Herr Fischer im Ernste geglaubt haben, (Vorrede S. V.) seine Bezeichnungsart sey als die einzige einfache und leichte der Hindenburgischen vorzuziehn, reiche so gar weiter als diese: so wird er nun, nach reiflicher Erwägung dessen, was oben (S. 54. 61 — 68.) dagegen erwiesen worden ist, eines andern belehret seyn. Also hier nichts weiter von der durch die Fischerische Bezeichnungsart verwürkten Einfachheit oder Simplicität in Absicht auf Anlage, Ausdruck und Entwickelung. Ich will blos noch erinnern und an einigen Beyspielen zeigen, wie viel die Leser der Fischerischen Schriften dadurch verloren haben, daß ihr Verfasser mehrere Hindenburgische Zeichen, die er sehr vortheilhaft hätte gebrauchen können, aus bekannten Ursachen (S. 150.) unbenuzt hat müssen liegen lassen.

In dem Fischerischen Werke kommt nichts von Local-Ausdrücken und Localformeln, nichts von Distanzexponen-

ten vor, das Surrogat für die Summenexponenten ist schwankend, die willkührlich angenommenen Coefficienten werden von den gegebenen nicht gehörig unterschieden, für die Polynomialcoefficienten findet man überhaupt gar keine, und für die Binomialcoefficienten keine bestimmt festgesezten Zeichen, und auch die besten sind noch mangelhaft. Dadurch verliert der Fischerische Vortrag unglaublich viel an Kürze, an lebendiger Darstellung der Resultate und an belehrender symbolischer Nachweisung, die selbst zu Erfindung neuer Sätze Veranlassung geben kann.

Localausdrücke, Localformeln, sind für die combinatorische Analytik von der größten Erheblichkeit. Man hat sich ihrer auch schon vorher in der Analysis mit grossem Nutzen bedient *); aber die combinatorisch-analytischen Ausdrücke, worin sich ihre Werthe, wie Herr Hindenburg zuerst gezeigt hat, sehr bequem und lichtvoll darstellen lassen, haben ihren Nutzen ungemein erhöht, und ihren Wirkungskreis erweitert. Die Hindenburgische Bezeichnung derselben für Glieder und Coefficienten λ) ist leicht und natürlich. Ihren Gebrauch, und zugleich ihr Verhalten zu den combinatorisch-analytischen Ausdrücken und Zeichen, in Beziehung auf Potenzen und Producte der Reihen, und was davon abhängig ist, lernt man am besten aus Nov. Syst. Comb. p. LI. — LIII. und verschiedenen dort aus Infin. Comb.

*) Unter andern auch Herr Hofrath Kästner bey dem allgemeinen Coefficienten seiner Formel für die Potenzen einer unendlichen Reihe. Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, §. 56. VIII — XIII. Die dortige numerische Bezeichnung ist sehr expressiv, nur daß die Coefficienten durch einander ausgedrückt werden. Das Hindenburgische Verfahren für den allgemeinen Coefficienten enthält gleichsam eine weitere Analyse des Kästnerischen. Eine ausführliche Auseinandersetzung der Kästnerischen Formel findet man Infin. Dign. p. 58 — 67.

λ) Nov. Syst. Comb. p. XXXIII. 2.

Dign. citirten Stellen μ) kennen. Localformeln sind vor andern bequem, zusammengesezte oft sehr verwickelte Lehrsätze darzustellen. Das Erste, was Herr Hindenburg bey weiterer Analysirung der Potenzen des Infinitinomiums

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots \overset{s-1}{\alpha} z^s = 1 + p$$

Belehrendes fand, war folgende Localformel ν)

$$(1+p)^m \urcorner (n+1) = {}^m\mathfrak{A} p^1 \urcorner n + {}^m\mathfrak{B} p^2 \urcorner (n-1) + {}^m\mathfrak{C} p^3 \urcorner (n-2)$$
$$+ \ldots {}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}} p^{n-r} \urcorner (r+1) \ldots + {}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}} p^{n-1} \urcorner 2 + {}^m\mathfrak{N} p^n \urcorner 1$$

ein Lehrsatz, der den ganzen Inhalt des allgemeinen $(n+1)$ten Gliedes der mten Potenz der Reihe $1+p$ durch zugehörige Glieder (gleichsam als Ingredienzien) der Potenz p^1, p^2, p^3, $p^4 \ldots p^n$ der Reihe p, sehr verständlich vorlegt. Diese Localformel zeigte zugleich, was weiter zu thun wäre, um das allgemeine Glied der Potenz der Reihe von allen vorhergehenden Gliedern derselben Potenz, derselben Reihe, unabhängig ausdrücken zu können, und daß man dafür geschmeidige Ausdrücke oder Werthe von $p^\nu \urcorner \mu$, für jeden Werth der ganzen Zahlen ν und μ, haben müsse; und diese fanden

μ) Vornehmlich p. 71. f. 3. 4. und p. 92. f. 3. ingleichen p. 94. seq. bey den Exempeln, ingleichen p. 136. seq. und Exempel. Es ist aber die dortige Zeichnung nicht ganz so vollkommen, als sie in Nov. Syst. Comb. ist. Ueberhaupt enthält das leztere (1781.) also zwey Jahre später erschienene Werk, vornehmlich in der Zeichnung, manche Verbesserung, die man nicht aus der Acht lassen muß.

ν) Sie steht Infin. Dign. p. 71. 3. ist aber nach der verbesserten Zeichnung, wie sie Nov. Syst. Comb. p. LI. (unten) vorkommt, hier abgedruckt. Die überschriebenen Zahlen sind Distanzexponenten, und hier exempelsweise gebraucht. Der Ausdruck $(1+p)^m \urcorner (n+1)$ ist gleichgeltend mit dem dortigen $\Gamma^{(n)} z^n$, und ${}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}} p^{n-r} \urcorner (r+1)$ ist ein allgemeines Glied des allgemeinen $(n+1)$ten Coefficientens. Vergl. Kästners Analysis des Unendlichen, §. 56. XIII.

fanden sich dann, nach den gehörigen Vorbereitungen ξ), in combinatorisch-analytischen Ausdrücken, nach welchen *)

$$p^{\nu}7\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{A}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ az & \beta z^2 & \gamma z^3 & \delta z^4 \ldots \end{pmatrix}$$

oder

$$p^{\nu}7\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{A}z^{\mu+\nu-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

die unbestimmte Combinationsclasse $\mathfrak{A}$, so wie der unbestimmte Polynomialcoefficient n, hängen hier nur allein von ν ab, so daß

$$\begin{array}{llllll} \text{für} & \nu = & 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ \text{dann} & \mathfrak{A} = & A, & B, & C, & D \ldots \\ \text{und} & n = & a, & b, & c, & d \ldots \end{array}$$

Die Zahl μ wird blos zu weiterer Bestimmung des Summenexponentens $\mu+\nu-1$ gebraucht.

Der lezte Ausdruck ist bequemer, weil die Potenz von z in ihm schon abgesondert ist, und die Combinationsclassen $\mathfrak{A}$, wie auch der Zeiger nachweist, nichts von z enthalten. Was also hier in $z^{\mu+\nu-1}$ multiplicirt ist, ist der zugehörige Coefficient $\varkappa$ des geforderten Potenzgliedes. Daher man auch schreiben kann

$$p^{\nu}\varkappa\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{A}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \ldots \end{pmatrix}$$

Dieser

ξ) Dahin gehört die Erfindung und Ausführung der combinatorischen Discerptionsaufgabe. Inf. Dign. §. XXII. p. 73—91.

*) Infin. Dign. p. 93. nach der verbesserten Zeichnung. (Note μ)

Dieser Ausdruck für den Coefficienten $p^{\nu}\varkappa\mu$ bleibt immer derselbe, zu was für arithmetisch-progressiven Potenzen von z die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... der gegebenen Reihe p auch immer gehören mögen. Nur wenn man das ganze Glied $p^{\nu}\rceil\mu$ ausdrücken will, muß man (wegen der Potenz von z, die in $p^{\nu}\varkappa\mu$ noch multiplicirt werden muß) diese Progression, d. i. die Folge der Potenzen von z kennen, wie sie zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... in p gehören. Man thut daher am besten, wenn man die Reihe p auch in Absicht auf ihre Exponenten von z sehr allgemein annimmt, wie auch in Novo Syst. Comb. überall geschehen ist, wo gewöhnlich die Reihe

$$\alpha z^{\mu} + \beta z^{\mu+\Delta} + \gamma z^{\mu+2\Delta} + \delta z^{\mu+3\Delta} + \text{rc.} = y$$

oder eine ähnliche zum Grunde liegt. Für eine solche Reihe y, ist

wenn m eine positive ganze Zahl

$$y^m\rceil n = [y^m\varkappa n]z^{m\mu+(n-1)\delta} = m^{m+u-1}\mathfrak{M}z^{m\mu+(n-1)\delta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon\ldots \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{für } m & = & 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ \text{wird } \mathfrak{M} & = & A & B & C & D\ldots \\ \text{und } m & = & \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d}\ldots \end{matrix}\right\}$$

wenn aber m jede Zahl bedeutet, so ist

$$y^m\rceil(n+1) = [y^m\varkappa(n+1)]z^{m\mu+n\delta} =$$

$$\alpha^m\left[\frac{{}^m\mathfrak{A}\mathfrak{a}^nA}{\alpha} + \frac{{}^m\mathfrak{B}\mathfrak{b}^nB}{\alpha^2} + \frac{{}^m\mathfrak{C}\mathfrak{c}^nC}{\alpha^3} + \frac{{}^m\mathfrak{D}\mathfrak{d}^nD}{\alpha^4} + \text{rc.}\right]z^{m\mu+n\delta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon\ldots \end{pmatrix}$$

Die Zahl der Glieder dieses Ausdrucks wird durch den Werth von n = 1, 2, 3, 4.... bestimmt; und so fliessen daraus die Formeln, wie sie Nov. Syst. Comb. p. LIV, 8. 7. stehen.

Der

Der combinatorische Ausdruck für $y^m\rceil(n+1)$ giebt (Nov. Syst. Comb. p. LI.) wieder rückwärts die Localformel

$$y^m\rceil(n+1) = \alpha^m \left[\frac{{}^m\mathfrak{A}p^1\rceil n}{\alpha} + \frac{{}^m\mathfrak{B}p^2\rceil(n-1)}{\alpha^2} + \frac{{}^m\mathfrak{C}p^3\rceil(n-2)}{\alpha^3} + \text{rc.}\right] z^{m\mu+n\delta}$$

$$\text{für } p = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{rc.}$$

oder auch

$$y^m\rceil(n+1) = \alpha^m \left[\frac{{}^m\mathfrak{A}p^1\varkappa n}{\alpha} + \frac{{}^m\mathfrak{B}p^2\varkappa(n-1)}{\alpha^2} + \frac{{}^m\mathfrak{C}p^3\varkappa(n-2)}{\alpha^3} + \text{rc.}\right] z^{m\mu+n\delta}$$

$$\text{für } p = \beta z^1 + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$$

Man kann nemlich die Coefficienten β, γ... die in y zu $z^{\mu+\Delta}$, $z^{\mu+2\Delta}$... gehören, in p als zu z^1, z^2... gehörig, ansehen, weil es auf die Coefficienten der Potenzen von p keinen Einfluß hat, welche arithmetische Progression die Exponenten von z auch immer befolgen.

Da die Localformeln, welche statt der Glieder selbst nur ihre Stellen angeben, so vielumfassend sind, und die Localausdrücke in ihnen sogleich in combinatorische, so wie umgekehrt diese wieder in jene, verwandelt werden können: so kann man durch diese Formeln auch sehr bequem Beweise geben, die auf andern Wegen sehr weitläuftig ausfallen würden. Ein interessantes sehr merkwürdiges Beyspiel dieser Art, wird Herr Magister Rothe in seiner akademischen Abhandlung π) aufstellen, worin er von der Eschenbachi-

 schen

π) Formulae de Serierum Reversione Demonstratio universalis, signis localibus, combinatorio-analyticorum vicariis, exhibita. Auctore M. Henr. Aug. Rothe. Lipsiae 1793. Diese Abhandlung enthält

schen Umkehrungsformel einen sehr sinnreichen Beweis blos durch Localzeichen geführt hat.

Herr Prof. Hindenburg bedient sich auch der Localausdrücke mit grosser Bequemlichkeit zu Erklärung der Einrichtung der Gesetze und des Gebrauchs der Tafeln, auch bey der Auflösung von Aufgaben, die von dergleichen Tafeln abhängen. Beyspiele dieses Gebrauchs kommen aber in den Hindenburgischen Schriften nicht vor.

So viel von den Localformeln in Beziehung auf Potenzen. Von denen für die Producte ...tsrqp7μ und ihren combinatorisch-analytischen Werthen sehe man Nov. Syst. Comb. p. LII. LIII. und die dort aus Infin. Dign. citirten Stellen.

Zu den beiden aus der gemeinen Arithmetik vorlängst bekannten Exponenten, der Potenz und der Ordnung der Ziffern, hat Herr Professor Hindenburg, zu grosser Bequemlichkeit der Rechnungen und lichtvoller Darstellung der Formeln, noch zwey andere hinzugesezt: den Summenexponenten und den Distanzexponenten. Jene beiden nennt er die arithmetischen, diese die algebraischen Exponenten; auch findet sich viel Aehnlichkeit bey beiderley Arten. Denn, so wie die Ordnungsexponenten die einzelnen Ziffern der Zahlen, eben so zählen und bezeichnen, positiv und negativ, die Distanzexponenten die einzelnen Coefficienten (oder auch Glieder) der Formeln; und, so wie die Potenzexponenten mit der Zahl, bey welcher sie stehen, die Menge und Art der Factoren anzeigen, die in der Potenz beysammen

eigentlich zwey Beweise, von denen der lezte auch auf die Doppelreihe angewendet wird, von deren Umkehrung Herr Fischer nichts beygebracht hat.

men sind, eben so bestimmen die Summenexponenten mit den combinatorischen Classen, bey welchen sie stehen, die Menge und Art der Coefficienten, die, als Factoren zusammengesezt, zu den Potenzen der variabeln Grössen gehören, mit welchen sie zusammen die Glieder der gesuchten Reihe oder Formel geben. Die Summenexponenten m, n, die Herr Hindenburg den grossen lateinischen Classenbuchstaben linker Hand zur Seite beyfügt, $a^{m}A$, $b^{m}B$, $c^{m}C$... und ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$; ${}^{n}\overset{rqp}{C}$... sezt Herr Fischer, unter der Benennung von Marken, oben über seine römische Zahlen oder grosse deutsche Buchstaben, $\overset{m}{I}$, $\overset{m}{II}$, $\overset{m}{III}$... oder $\overset{m+1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{m+2}{\mathfrak{B}}$, $\overset{m+3}{\mathfrak{C}}$... und $\overset{n}{\mathfrak{A}}$, $\overset{n}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{n}{IA\mathfrak{A}}$.... (S. 56.) Was dadurch an Simplicität und Harmonie verloren geht, davon kann man oben (S. 57 — 60.) nachsehen.

Da die Summenexponenten, mit den Zahlen oder Buchstaben vereint, die Fischerischen Dimensionszeichen ausmachen, so sind die einen unzertrennliche Gefährten der andern. Auch konnte Herr Fischer ohne die Dimensionszeichen gar nichts ausrichten. Sollte also das Fischerische Werk die Wirkungen darstellen, die es zeigt: so war die Entlehnung dieser Zeichen aus den Hindenburgischen Schriften ein Werk der Nothwendigkeit, weil es kein Surrogat dieser Zeichen giebt. Die Distanzexponenten hingegen hat Herr Fischer unbenuzt liegen lassen, so wichtig ihr Gebrauch auch immer ist, bey gemeinen und willkührlich angenommenen, bey Binomial- und Polynomialcoefficienten, bey Combinations- und Variationsclassen und Zeichen u. s. w. überhaupt, bey Ausdrückung gleichartiger Dinge und gleichnamiger Zeichen durch einander, folgender durch vorhergehende und umgekehrt, bestimmter durch unbestimmte und wechselsweise, überhaupt jeder willkührlich gewählter Dinge

kommen dieselbe, wie sie Infin. Dign. p. 40 steht; wenn man für den dortigen Exponenten m hier n setzt. Aber die dort gebrauchten Zeichen sind bey weitem nicht so vollkommen, als die hier mitgetheilten, wie sie auch nachher in Nov. Syst. Comb. gebraucht worden. Man vergleiche hier die Note oo Seite 69. 70.

Den Gang, den man nehmen kann, aus den Formeln mit Combinationszeichen für bestimmte Summen, zu den correspondirenden Formeln mit Combinationszeichen für Combinationen an sich zu kommen, (den Uebergang aus den Potenzformeln der einen Art in die der andern) zeigt Infin. Dign. p. 145 — 147. sehr deutlich. Denn die dortige Formel in 3 giebt, für $z = 1$, die Formel in 4, diese giebt, wenn man die Glieder nach α^{m-1}, α^{m-2}, α^{m-3} rc. ordnet, die dortige Formel in 6, woraus denn, wenn man (Nov. Syst. Comb. p. XLIX. 1.) setzt

$^1A + {}^2A + {}^3A +$ rc. $= {}'A$ und $^2B + {}^3B + {}^4B +$ rc. $= {}'B$

und so weiter die Formel

$\alpha^m + {}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}a'A + {}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2}b'B + {}^m\mathfrak{C}\alpha^{m-3}c'C +$ rc.

folgt, wie sie oben steht. Die Hindenburgische Entwickelung (Infin. Dign. p. 146. 5.) enthält genau das, was Herr Fischer (§. 38.) gegeben hat. Aber welcher Unterschied in der Darstellung! da bey Herrn Hindenburg alles aus der dortigen lichtvollen Formel (in 4.) fließt. Man vergleiche hier die Note m S. 19. 20.

Ich will noch ein Beyspiel ausheben, die Beschränktheit der Fischerischen Theorie mit der Reichhaltigkeit der Hindenburgischen zu vergleichen.

Der erste Paragraf des Fischerischen Werks sagt: das Product von m Reihen giebt alle mtionen. Der dritte Paragraf wiederholt das nemliche, wenn alle Reihen einerley sind. Und das ist alles, was Herr Fischer von diesem Hauptbegriffe sagt. Hierbey bleibt unberührt:

1) Das

1) Das Allgemeine der figürlichen Anordnung und Darstellung eines solchen Products im Besonderen vorzulegen; welches die erste und allgemeinste Haupttafel, und gleichsam den Repräsentanten des ganzen Systems giebt.

2) Wie aus dieser Darstellung alle Fundamental- und Specialtafeln abgeleitet werden können, zu zeigen. Z. B. Man ordne die Complexionen dieser ersten Tafel nach bestimmten Summen, so giebt dieses eine zweyte Tafel. Man lasse in beiden Tafeln alle Wiederholungen weg, so hat man eine 3te und 4te Tafel. Die weggelassenen Wiederholungen für sich, geben eine 5te und 6te Tafel. Man lasse wieder in den beiden ersten Tafeln alle Versetzungen weg, so erhält man eine 7te und 8te Tafel. Die weggelassenen Versetzungen geben eine 9te und 10te Tafel. Man lasse in den beiden ersten Tafeln abermals alle Versetzungen und Wiederholungen zusammen weg, so giebt dieses eine 11te und 12te Tafel. Die weggelassenen Versetzungen und Wiederholungen für sich geben eine 13te und 14te Tafel, u. s. w. Diese Tafeln, die man noch auf mehrere Arten modificiren kann, machen gleichsam das allgemeine Magazin combinatorischer und auf die Analysis zu benutzender Verwickelungen und Gesetze aus. Sie sind aber bey weitem nicht alle gleichwichtig. Einige von ihnen sind theils an sich, theils in Verbindung mit figürlichen und andern Zahlen, von unendlichem Gebrauche, andere haben nur einen sehr beschränkten Nutzen, daher nöthig ist, die an sich so grosse nicht zu übersehende Mannichfaltigkeit derselben durch kluge Auswahl des Brauchbarsten einzuschränken.

3) Wie man jede Classe der einzelnen Tafeln, (die man nun für sich, und nicht weiter als abhängig von andern Tafeln betrachtet) theils von vorhergehenden Classen ableiten, theils an sich independent von andern darstellen könne. Eben das gilt auch von den verticalen Reihen jeder nach figürlicher Anordnung (S. 48. 7.) dargestellten Classe.

4) Wie

4) Wie man jede einzelne nach ihrer Ordnungszahl angegebene Complexion, ausser der Ordnung darstellen, und umgekehrt, einer einzeln dargestellten Complexion Ordnungszahl in der Classe angeben könne.

5) Wie viel in jeder Classe Complexionen, wie viel in jeder Verticalreihe, wie viel ihrer in allen Classen in jeder Tafel zusammen sind, u. s. w.

Das mag einerseits zeigen, wie unerschöpflich ein solcher combinatorischer Hauptbegriff ist, und wie reichhaltig etwa das System seyn mag, dem lauter solche Begriffe zum Grunde liegen; andererseits kann man daraus abnehmen, daß die Leser der Fischerischen Theorie einen solchen fruchtbaren überall auf bestimmte und entwickelte Begriffe ausgehenden Vortrag entbehren.

So viel von dem, was die Materie und den Umfang beider Werke anbetrift; noch muß ich etwas von ihrer Form in Ansehung der Zeichen und den durch sie bewürkten Vortrag in der Kürze beybringen.

Sollte Herr Fischer im Ernste geglaubt haben, (Vorrede S. V.) seine Bezeichnungsart sey als die einzige einfache und leichte der Hindenburgischen vorzuziehn, reiche so gar weiter als diese: so wird er nun, nach reiflicher Erwägung dessen, was oben (S. 54. 61 — 68.) dagegen erwiesen worden ist, eines andern belehret seyn. Also hier nichts weiter von der durch die Fischerische Bezeichnungsart verwürkten Einfachheit oder Simplicität in Absicht auf Anlage, Ausdruck und Entwickelung. Ich will blos noch erinnern und an einigen Beyspielen zeigen, wie viel die Leser der Fischerischen Schriften dadurch verloren haben, daß ihr Verfasser mehrere Hindenburgische Zeichen, die er sehr vortheilhaft hätte gebrauchen können, aus bekannten Ursachen (S. 150.) unbenuzt hat müssen liegen lassen.

In dem Fischerischen Werke kommt nichts von Localausdrücken und Localformeln, nichts von Distanzexponenten

ten vor, das Surrogat für die Summenexponenten ist schwankend, die willkührlich angenommenen Coefficienten werden von den gegebenen nicht gehörig unterschieden, für die Polynomialcoefficienten findet man überhaupt gar keine, und für die Binomialcoefficienten keine bestimmt festgesezten Zeichen, und auch die besten sind noch mangelhaft. Dadurch verliert der Fischerische Vortrag unglaublich viel an Kürze, an lebendiger Darstellung der Resultate und an belehrender symbolischer Nachweisung, die selbst zu Erfindung neuer Sätze Veranlassung geben kann.

Localausdrücke, Localformeln, sind für die combinatorische Analytik von der grössten Erheblichkeit. Man hat sich ihrer auch schon vorher in der Analysis mit grossem Nutzen bedient *); aber die combinatorisch-analytischen Ausdrücke, worin sich ihre Werthe, wie Herr Hindenburg zuerst gezeigt hat, sehr bequem und lichtvoll darstellen lassen, haben ihren Nutzen ungemein erhöht, und ihren Wirkungskreis erweitert. Die Hindenburgische Bezeichnung derselben für Glieder und Coefficienten λ) ist leicht und natürlich. Ihren Gebrauch, und zugleich ihr Verhalten zu den combinatorisch-analytischen Ausdrücken und Zeichen, in Beziehung auf Potenzen und Producte der Reihen, und was davon abhängig ist, lernt man am besten aus Nov. Syst. Comb. p. LI. — LIII. und verschiedenen dort aus Infin. Comb.

*) Unter andern auch Herr Hofrath Kästner bey dem allgemeinen Coefficienten seiner Formel für die Potenzen einer unendlichen Reihe. Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, §. 56. VIII — XIII. Die dortige numerische Bezeichnung ist sehr expressiv, nur daß die Coefficienten durch einander ausgedrückt werden. Das Hindenburgische Verfahren für den allgemeinen Coefficienten enthält gleichsam eine weitere Analyse des Kästnerischen. Eine ausführliche Auseinandersetzung der Kästnerischen Formel findet man Infin. Dign. p. 58 — 67.

λ) Nov. Syst. Comb. p. XXXIII. 2.

Dign. citirten Stellen μ) kennen. Localformeln sind vor andern bequem, zusammengesetzte oft sehr verwickelte Lehrsätze darzustellen. Das Erste, was Herr Hindenburg bey weiterer Analysirung der Potenzen des Infinitinomiums

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots \overset{s-1}{\alpha} z^s = 1 + p$$

Belehrendes fand, war folgende Localformel ν)

$$(1+p)^m \urcorner (n+1) = {}^m\mathfrak{A}p^1 \urcorner n + {}^m\mathfrak{B}p^2 \urcorner (n-1) + {}^m\mathfrak{C}p^3 \urcorner (n-2)$$
$$+ \ldots {}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}}p^{n-r} \urcorner (r+1) \ldots + {}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}}p^{n-1} \urcorner 2 + {}^m\mathfrak{N}p^n \urcorner 1$$

ein Lehrsatz, der den ganzen Inhalt des allgemeinen (n+1)ten Gliedes der mten Potenz der Reihe 1+p durch zugehörige Glieder (gleichsam als Ingredienzien) der Potenz p^1, p^2, p^3, $p^4 \ldots p^n$ der Reihe p, sehr verständlich vorlegt. Diese Localformel zeigte zugleich, was weiter zu thun wäre, um das allgemeine Glied der Potenz der Reihe von allen vorhergehenden Gliedern derselben Potenz, derselben Reihe, unabhängig ausdrücken zu können, und daß man dafür geschmeidige Ausdrücke oder Werthe von $p^\nu \urcorner \mu$, für jeden Werth der ganzen Zahlen ν und μ, haben müsse; und diese fanden

μ) Vornehmlich p. 71. L. 3. 4. und p. 92. f. 3. ingleichen p. 94. seq. bey den Exempeln, ingleichen p. 136. seq. und Exempel. Es ist aber die dortige Zeichnung nicht ganz so vollkommen, als sie in Nov. Syst. Comb. ist. Ueberhaupt enthält das leztere (1781.) also zwey Jahre später erschienene Werk, vornehmlich in der Zeichnung, manche Verbesserung, die man nicht aus der Acht lassen muß.

ν) Sie steht Infin. Dign. p. 71. 3. ist aber nach der verbesserten Zeichnung, wie sie Nov. Syst. Comb. p. LI. (unten) vorkommt, hier abgedruckt. Die überschriebenen Zahlen sind Distanzexponenten, und hier exempelsweise gebraucht. Der Ausdruck $(1+p)^m \urcorner (n+1)$ ist gleichgeltend mit dem dortigen $\Gamma^{(n)} z^n$, und ${}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}}p^{n-r} \urcorner (r+1)$ ist ein allgemeines Glied des allgemeinen (n+1)ten Coefficientens. Vergl. Kästners Analysis des Unendlichen, §. 56. XIII.

fanden sich dann, nach den gehörigen Vorbereitungen ξ), in combinatorisch-analytischen Ausdrücken, nach welchen *)

$$p^{\nu}\mathfrak{l}\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{N}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \dots \\ \alpha z & \beta z^2 & \gamma z^3 & \delta z^4 \dots\end{pmatrix}$$

oder

$$p^{\nu}\mathfrak{l}\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{N}z^{\mu+\nu-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \dots\end{pmatrix}$$

die unbestimmte Combinationsclasse $\mathfrak{N}$, so wie der unbestimmte Polynomialcoefficient n, hängen hier nur allein von ν ab, so daß

für $\nu = 1, \ 2, \ 3, \ 4 \dots$
dann $\mathfrak{N} = A, \ B, \ C, \ D \dots$
und $n = a, \ b, \ c, \ d \dots$

Die Zahl μ wird blos zu weiterer Bestimmung des Summenexponentens $\mu+\nu-1$ gebraucht.

Der lezte Ausdruck ist bequemer, weil die Potenz von z in ihm schon abgesondert ist, und die Combinationsclassen $\mathfrak{N}$, wie auch der Zeiger nachweist, nichts von z enthalten. Was also hier in $z^{\mu+\nu-1}$ multiplicirt ist, ist der zugehörige Coefficient $\varkappa$ des geforderten Potenzgliedes. Daher man auch schreiben kann

$$p^{\nu}\varkappa\mu = n^{\mu+\nu-1}\mathfrak{N}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \dots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \dots\end{pmatrix}$$

Dieser

ξ) Dahin gehört die Erfindung und Ausführung der combinatorischen Discerptionsaufgabe. Inf. Dign. §. XXII. p. 73—91.

*) Infin. Dign. p. 93. nach der verbesserten Zeichnung. (Note μ)

Dieser Ausdruck für den Coefficienten $p^{\nu} \varkappa \mu$ bleibt immer derselbe, zu was für arithmetisch-progressiven Potenzen von z die Coefficienten α, β, γ, δ.... der gegebenen Reihe p auch immer gehören mögen. Nur wenn man das ganze Glied $p^{\nu} \urcorner \mu$ ausdrücken will, muß man (wegen der Potenz von z, die in $p^{\nu} \varkappa \mu$ noch multiplicirt werden muß) diese Progression, d. i. die Folge der Potenzen von z kennen, wie sie zu α, β, γ, δ.... in p gehören. Man thut daher am besten, wenn man die Reihe p auch in Absicht auf ihre Exponenten von z sehr allgemein annimmt, wie auch in Novo Syst. Comb. überall geschehen ist, wo gewöhnlich die Reihe

$$\alpha z^{\mu} + \beta z^{\mu+\Delta} + \gamma z^{\mu+2\Delta} + \delta z^{\mu+3\Delta} + \text{rc.} = y$$

oder eine ähnliche zum Grunde liegt. Für eine solche Reihe y, ist

wenn m eine positive ganze Zahl

$$y^m \urcorner n = [y^m \varkappa n] z^{m\mu+(n-1)\delta} = \mathfrak{m}^{m+n-1} \mathfrak{M} z^{m\mu+(n-1)\delta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \text{für } m & = & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \text{wird } \mathfrak{M} & = & A & B & C & D & \ldots \\ \text{und } \mathfrak{m} & = & \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \ldots \end{array}\right\}$$

wenn aber m jede Zahl bedeutet, so ist

$$y^m \urcorner (n+1) = [y^m \varkappa (n+1)] z^{m\mu+n\delta} =$$

$$\alpha^m \left[\frac{{}^m\mathfrak{A}\mathfrak{a}^n A}{\alpha} + \frac{{}^m\mathfrak{B}\mathfrak{b}^n B}{\alpha^2} + \frac{{}^m\mathfrak{C}\mathfrak{c}^n C}{\alpha^3} + \frac{{}^m\mathfrak{D}\mathfrak{d}^n D}{\alpha^4} + \text{rc.}\right] z^{m\mu+n\delta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

Die Zahl der Glieder dieses Ausdrucks wird durch den Werth von n = 1, 2, 3, 4.... bestimmt; und so fliessen daraus die Formeln, wie sie Nov. Syst. Comb. p. LIV. §. 7. stehen.

Der

Der combinatorische Ausdruck für $y^{m}\rceil(n+1)$ giebt (Nov. Syst. Comb. p. LI.) wieder rückwärts die Localformel

$$y^{m}\rceil(n+1) = \alpha^{m}\left[\frac{{}^{m}\mathfrak{A}p^{1}\rceil n}{\alpha} + \frac{{}^{m}\mathfrak{B}p^{2}\rceil(n-1)}{\alpha^{2}} + \frac{{}^{m}\mathfrak{C}p^{3}\rceil(n-2)}{\alpha^{3}} + \text{ꝛc.}\right] z^{m\mu+n\delta}$$

für $p = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ ꝛc.

oder auch

$$y^{m}\rceil(n+1) = \alpha^{m}\left[\frac{{}^{m}\mathfrak{A}p^{1}\varkappa n}{\alpha} + \frac{{}^{m}\mathfrak{B}p^{2}\varkappa(n-1)}{\alpha^{2}} + \frac{{}^{m}\mathfrak{C}p^{3}\varkappa(n-2)}{\alpha^{3}} + \text{ꝛc.}\right] z^{m\mu+n\delta}$$

für $p = \beta z^{1} + \gamma z^{2} + \delta z^{3} + \varepsilon z^{4} + \ldots$

Man kann nemlich die Coefficienten β, $\gamma \ldots$ die in y zu $z^{\mu+\Delta}$, $z^{\mu+2\Delta} \ldots$ gehören, in p als zu z^{1}, $z^{2} \ldots$ gehörig, ansehen, weil es auf die Coefficienten der Potenzen von p keinen Einfluß hat, welche arithmetische Progression die Exponenten von z auch immer befolgen.

Da die Localformeln, welche statt der Glieder selbst nur ihre Stellen angeben, so vielumfassend sind, und die Localausdrücke in ihnen sogleich in combinatorische, so wie umgekehrt diese wieder in jene, verwandelt werden können: so kann man durch diese Formeln auch sehr bequem Beweise geben, die auf andern Wegen sehr weitläuftig ausfallen würden. Ein interessantes sehr merkwürdiges Beyspiel dieser Art, wird Herr Magister Rothe in seiner akademischen Abhandlung π) aufstellen, worin er von der Eschenbachi-

schen

π) Formulae de Seriorum Reversione Demonstratio universalis, signis localibus, combinatorio-analyticorum vicariis, exhibita. Auctore M. Henr. Aug. Rothe: Lipsiae 1793. Diese Abhandlung enthält

schen Umkehrungsformel einen sehr sinnreichen Beweis blos durch Localzeichen geführt hat.

Herr Prof. Hindenburg bedient sich auch der Localausdrücke mit grosser Bequemlichkeit zu Erklärung der Einrichtung der Gesetze und des Gebrauchs der Tafeln, auch bey der Auflösung von Aufgaben, die von dergleichen Tafeln abhängen. Beyspiele dieses Gebrauchs kommen aber in den Hindenburgischen Schriften nicht vor.

So viel von den Localformeln in Beziehung auf Potenzen. Von denen für die Producte ...tsrqp$^{7}\mu$ und ihren combinatorisch-analytischen Werthen sehe man Nov. Syst. Comb. p. LII. LIII. und die dort aus Infin. Dign. citirten Stellen.

Zu den beiden aus der gemeinen Arithmetik vorlängst bekannten Exponenten, der Potenz und der Ordnung der Ziffern, hat Herr Professor Hindenburg, zu grosser Bequemlichkeit der Rechnungen und lichtvoller Darstellung der Formeln, noch zwey andere hinzugesezt: den Summenexponenten und den Distanzexponenten. Jene beiden nennt er die arithmetischen, diese die algebraischen Exponenten; auch findet sich viel Aehnlichkeit bey beiderley Arten. Denn, so wie die Ordnungsexponenten die einzelnen Ziffern der Zahlen, eben so zählen und bezeichnen, positiv und negativ, die Distanzexponenten die einzelnen Coefficienten (oder auch Glieder) der Formeln; und, so wie die Potenzexponenten mit der Zahl, bey welcher sie stehen, die Menge und Art der Factoren anzeigen, die in der Potenz beysammen

eigentlich zwey Beweise, von denen der lezte auch auf die Doppelreihe angewendet wird, von deren Umkehrung Herr Fischer nichts beygebracht hat.

men sind, eben so bestimmen die Summenexponenten mit den combinatorischen Classen, bey welchen sie stehen, die Menge und Art der Coefficienten, die, als Factoren zusammengesezt, zu den Potenzen der variabeln Grössen gehören, mit welchen sie zusammen die Glieder der gesuchten Reihe oder Formel geben. Die Summenexponenten m, n, die Herr Hindenburg den grossen lateinischen Classenbuchstaben linker Hand zur Seite beyfügt, $a\,{}^{m}A$, $b\,{}^{m}B$, $c\,{}^{m}C$... und ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$; ${}^{n}\overset{rqp}{C}$... sezt Herr Fischer, unter der Benennung von Marken, oben über seine römische Zahlen oder grosse deutsche Buchstaben, $\overset{m}{I}$, $\overset{m}{II}$, $\overset{m}{III}$... oder $\overset{m+1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{m+2}{\mathfrak{B}}$, $\overset{m+3}{\mathfrak{C}}$... und $\overset{n}{\mathfrak{A}}$, $\overset{n}{A}\mathfrak{A}$, $\overset{n}{I}A\mathfrak{A}$.... (S. 56.) Was dadurch an Simplicität und Harmonie verloren geht, davon kann man oben (S. 57 — 60.) nachsehen.

Da die Summenexponenten, mit den Zahlen oder Buchstaben vereint, die Fischerischen Dimensionszeichen ausmachen, so sind die einen unzertrennliche Gefährten der andern. Auch konnte Herr Fischer ohne die Dimensionszeichen gar nichts ausrichten. Sollte also das Fischerische Werk die Wirkungen darstellen, die es zeigt: so war die Entlehnung dieser Zeichen aus den Hindenburgischen Schriften ein Werk der Nothwendigkeit, weil es kein Surrogat dieser Zeichen giebt. Die Distanzexponenten hingegen hat Herr Fischer unbenuzt liegen lassen, so wichtig ihr Gebrauch auch immer ist, bey gemeinen und willkührlich angenommenen, bey Binomial- und Polynomialcoefficienten, bey Combinations- und Variationsclassen und Zeichen u. s. w. überhaupt, bey Ausdrückung gleichartiger Dinge und gleichnamiger Zeichen durch einander, folgender durch vorhergehende und umgekehrt, bestimmter durch unbestimmte und wechselsweise, überhaupt jeder willkührlich gewählter Dinge oder

oder ihrer Zeichen durch jede andere zu derselben Art gehörige, aber gleichfalls willkührlich gewählte, Dinge oder Zeichen. Die sehr einfachen canonischen Formeln der Distanzexponenten, wodurch ihre Relation gegen einander angegeben wird, stehen Nov. Syst. Comb. p. LXV. und LXVI. Man vergleiche p. XXXVII. — XXXIX. wo zulezt erinnert wird, man solle die Distanzexponenten mit den Ordnungsexponenten, mit denen sie grosse Aehnlichkeit haben, und dieserhalb auch über die Buchstaben geschrieben werden, nicht verwechseln.

Eben so ist auch Herr Fischer die so vollkommene als zweckmässige Bezeichnung der Binomialcoefficienten (Nov. Syst. Combin. p. XL. 9. und hier S. 49. 10.) vorbeygegangen, und hat sich mit unvollkommenern, bey weitem nicht so darstellenden und mannigfaltig zu benutzenden Zeichen (dergleichen Herr Hindenburg auch zum Theil Infin. Dign. gebraucht, aber nachher wieder verlassen hatte) begnügt, (hier S. 60.) obschon mehrere Gelegenheiten sich zeigten, wo er vortheilhaften Gebrauch davon hätte machen können.

Folgendes Beyspiel, wo Binomialcoefficienten vermittelst der Distanzexponenten ausgedrückt erscheinen, wird zeigen, in welche Weitläuftigkeit Herr Fischer, aus Mangel schicklicher und bequemer Zeichen, verfällt.

Der Lehrsatz (§. 146.) und der Satz (§. 367. am Ende) hängen beide von einem allgemeinen Satze ab, der sich leichter, als Herr Fischer die speciellern Fälle erwiesen hat, auf folgende Art finden und darthun läßt.

Da

$$\text{Da}\ (1+x)^m = 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + \ldots + \overset{-1}{{}^m\mathfrak{Y}}x^{\nu-1} + {}^m\mathfrak{Y}x^\nu$$

$$\text{und}\ (1+x)^n = 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + \ldots + \overset{-1}{{}^n\mathfrak{Y}}x^{\nu-1} + {}^n\mathfrak{Y}x^\nu$$

$$\begin{aligned}\text{so ist}\ (1+x)^{n+m} = 1 &+ 1.{}^m\mathfrak{A}x + 1\,{}^m\mathfrak{B}x^2 + 1.{}^m\mathfrak{C}x^3 + \ldots + 1.{}^m\mathfrak{Y}x^\nu \\ &+ {}^n\mathfrak{A}.1x + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{A}x^2 + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{B}x^3 + \ldots\ {}^n\mathfrak{A}\,\overset{-1}{{}^m\mathfrak{Y}}x^\nu \\ &+ {}^n\mathfrak{B}.1.x^2 + {}^n\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{A}x^3 + \ldots\ {}^n\mathfrak{B}\,\overset{-2}{{}^m\mathfrak{Y}}x^\nu \\ &+ {}^n\mathfrak{C}.1\,x^3 + \ldots\ {}^n\mathfrak{C}\,\overset{-3}{{}^m\mathfrak{Y}}x^\nu \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{„} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{„} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{-1}{{}^n\mathfrak{Y}}\,{}^m\mathfrak{A}x^\nu \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad {}^n\mathfrak{Y}.1x^\nu\end{aligned}$$

$$\text{auch ist}\ (1+x)^{n+m} = 1 + {}^{n+m}\mathfrak{A}x + {}^{n+m}\mathfrak{B}x^2 + {}^{n+m}\mathfrak{C}x^3 + \ldots + {}^{n+m}\mathfrak{Y}x^\nu$$

woraus sich folgende fruchtbare Relation ergiebt:

$$\begin{aligned}{}^{n+m}\mathfrak{A} &= 1.{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{A}.1 \\ {}^{n+m}\mathfrak{B} &= 1.{}^m\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}. \\ {}^{n+m}\mathfrak{C} &= 1.{}^m\mathfrak{C} + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{C}.1 \\ {}^{n+m}\mathfrak{D} &= 1.{}^m\mathfrak{D} + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{C} + {}^n\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{C}\,{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{D}.1 \\ &\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \\ &\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \\ {}^{n+m}\mathfrak{Y} &= 1.{}^m\mathfrak{Y} + {}^n\mathfrak{A}\,\overset{-1}{{}^m\mathfrak{Y}} + {}^n\mathfrak{B}\,\overset{-2}{{}^m\mathfrak{Y}} + {}^n\mathfrak{C}\,\overset{-3}{{}^m\mathfrak{Y}} + {}^n\mathfrak{D}\,\overset{-4}{{}^m\mathfrak{Y}} \\ &\quad + \ldots\ \overset{-2}{{}^n\mathfrak{Y}}\,{}^m\mathfrak{B} + \overset{-1}{{}^n\mathfrak{Y}}\,{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{Y}.1\end{aligned}$$

Hier ist $\mathfrak{Y}$ der allgemeine νte, $\overset{-1}{\mathfrak{Y}}$ der $(\nu-1)$te, $\overset{-2}{\mathfrak{Y}}$ der $(\nu-2)$te ꝛc. Binomialcoefficient für die beygeschriebenen Exponenten n, m, $n+m$; und

für $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots$

wird $\mathfrak{Y} = \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} \ldots$

Setzt

Sezt man hier nach und nach

$$m = 0;\ \mp 1;\ \mp 2;\ \mp 3;\ \mp 4;\ \ldots \mp r$$

so geben die negativen Zahlen die Fischerischen Formeln §. 146 — 148. die positiven Zahlen die Formeln §. 367. am Ende. Sezt man z. B. $m = -1$, so kommt

$$^{n-1}\mathfrak{V} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\nu)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ \nu}$$

und es ist

$$^{n-1}\mathfrak{V} = 1.\,^{-1}\mathfrak{V} + {}^{n}\mathfrak{A}\,^{-1}\overset{-1}{\mathfrak{V}} + {}^{n}\mathfrak{B}\,^{-1}\overset{-2}{\mathfrak{V}} + \ldots\ {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{V}}\,^{-1}\mathfrak{A}$$
$$+ {}^{n}\mathfrak{V}.1$$

Da hier alle Binomialcoefficienten vom Exponenten -1, abwechselnd -1 und $+1$ sind, nachdem die Zahl dieser Coefficienten, nach der sie gezählt werden, ungerade oder gerade ist, so hat Herr Fischer, damit sein Anfangsglied linker Hand immer $+1$ seyn möchte, die Zeichen des lezten Gliedes und des Werthes der Reihe, wie sie dazu gehören, vorgeschrieben. Aus vorstehender Formel ergeben sie sich von selbst. Will man aber eine bestimmte Norm angeben, so darf man, weil $^{n}\mathfrak{V}.1.$ allemal das Zeichen $+$ hat, die Reihe nur umgekehrt schreiben, so ist

$$^{n}\mathfrak{V} - {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{V}} + {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{V}} - {}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{V}} + {}^{n}\overset{-4}{\mathfrak{V}} \ldots \pm 1 = {}^{n-1}\mathfrak{V}$$

gerade die Fischerische Formel §. 146. wo aber die 1 zulezt steht, deren Zeichen durch den Fortgang sich ebenfalls von selbst ergiebt, nachdem nemlich die 1 in eine ungerade oder gerade Stelle fällt.

Eben so, wenn man in obigen Formeln sezt

$m = 0$ wird $^{n}\mathfrak{A} = {}^{n}\mathfrak{A}$
$m = 1$ " $^{n+1}\mathfrak{B} = {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}$
$m = 2$ " $^{n+2}\mathfrak{C} = {}^{n}\mathfrak{A} + 2\,^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C}$
$m = 3$ " $^{n+3}\mathfrak{D} = {}^{n}\mathfrak{A} + 3\,^{n}\mathfrak{B} + 3\,^{n}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{D}$
$m = 4$ " $^{n+4}\mathfrak{E} = {}^{n}\mathfrak{A} + 4\,^{n}\mathfrak{B} + 6\,^{n}\mathfrak{C} + 4\,^{n}\mathfrak{D} + {}^{n}\mathfrak{E}$
" " " " " " " "

und

und so können die Fischerischen Formeln (§. 367. S. 168.) hergeleitet werden, ohne daß man nöthig hat, die allgemeine Potenzenformel mit den Dimensionszeichen zu Hülfe zu nehmen, wie Herr Fischer gethan, der nicht gewußt hat, daß die Sätze (§. 146. und 367.) aus einem einzigen allgemeinen fliessen, der auch §. 165 seine Anwendung findet, und eine allgemeine Summenformel für Binomialcoefficienten darstellt. Allein so expressiv gezeichnete allgemeine fruchtbare Sätze hat Herr Fischer nicht gekannt. Hier sieht man zugleich ein leichtes Mittel, dergleichen Sätze mehrere zu finden; auch solche, wo Binomialcoefficienten von drey, vier und mehrern Exponenten m, n, r, s.... in einander verwickelt vorkommen. Ihr Gesetz deutlich anzugeben muß man dann die Variationsclassen brauchen; nach Herrn Hindenburgs vollkommener Zeichnung, wie sich von selbst versteht.

Solcher Relationen der Binomialcoefficienten hat, auf diesen und andern Wegen, Herr Prof. Hindenburg mehrere gefunden und in einer ausführlichen Tafel gesammlet, auch ihre promte Auflösung, für gewisse angenommene Werthe der Exponenten, in andern Tafeln nachgewiesen. Diese Sammlung ist für die gesammte Analysis, nicht blos für die combinatorische, wichtig. Diese Tafel zeigt auch die Gleichgültigkeit der so eben entwickelten Binomialcoefficienten mit folgenden:

$${}^{n}\mathfrak{A} = -\,{}^{-n}\mathfrak{A};\quad {}^{n+1}\mathfrak{B} = +\,{}^{-n}\mathfrak{B};\quad {}^{n+2}\mathfrak{C} = -\,{}^{-n}\mathfrak{C};$$

$${}^{n+3}\mathfrak{D} = +\,{}^{-n}\mathfrak{D};\quad {}^{n+4}\mathfrak{E} = +\,{}^{-n}\mathfrak{E};\quad {}^{n+5}\mathfrak{F} = +\,{}^{-n}\mathfrak{F};\ \text{rc.}$$

Ist irgend ein System von Zeichen durch und durch vortreflich, so ist es gewiß das combinatorisch-analytische (Nov. Syst. Comb. p. XXXII. — XLIX — LVI.) von Herrn Professor Hindenburg. In diesem scheint, wie gesagt

Dign. citirten Stellen μ) kennen. Localformeln sind vor andern bequem, zusammengesezte oft sehr verwickelte Lehrsätze darzustellen. Das Erste, was Herr Hindenburg bey weiterer Analysirung der Potenzen des Infinitinomiums

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots \overset{s-1}{\alpha} z^s = 1 + p$$

Belehrendes fand, war folgende Localformel ν)

$$(1+p)^m \urcorner (n+1) = {}^m\mathfrak{A}p^1 \urcorner n + {}^m\mathfrak{B}p^2 \urcorner (n-1) + {}^m\mathfrak{C}p^3 \urcorner (n-2)$$
$$+ \ldots {}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}} p^{n-r} \urcorner (r+1) \ldots + {}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}} p^{n-1} \urcorner 2 + {}^m\mathfrak{N} p^n \urcorner 1$$

ein Lehrsatz, der den ganzen Inhalt des allgemeinen $(n+1)$ten Gliedes der $m$ten Potenz der Reihe $1+p$ durch zugehörige Glieder (gleichsam als Ingredienzien) der Potenz p^1, p^2, p^3, $p^4 \ldots p^n$ der Reihe p, sehr verständlich vorlegt. Diese Localformel zeigte zugleich, was weiter zu thun wäre, um das allgemeine Glied der Potenz der Reihe von allen vorhergehenden Gliedern derselben Potenz, derselben Reihe, unabhängig ausdrücken zu können, und daß man dafür geschmeidige Ausdrücke oder Werthe von $p^\nu \urcorner \mu$, für jeden Werth der ganzen Zahlen ν und μ, haben müsse; und diese fanden

μ) Vornehmlich p. 71. L. 3. 4. und p. 92. f. 3. ingleichen p. 94. seq. bey den Exempeln, ingleichen p. 136. seq. und Exempel. Es ist aber die dortige Zeichnung nicht ganz so vollkommen, als sie in Nov. Syst. Comb. ist. Ueberhaupt enthält das leztere (1781.) also zwey Jahre später erschienene Werk, vornehmlich in der Zeichnung, manche Verbesserung, die man nicht aus der Acht lassen muß.

ν) Sie steht Infin. Dign. p. 71. 3. ist aber nach der verbesserten Zeichnung, wie sie Nov. Syst. Comb. p. LI. (unten) vorkommt, hier abgedruckt. Die überschriebenen Zahlen sind Distanzexponenten, und hier exempelsweise gebraucht. Der Ausdruck $(1+p)^m \urcorner (n+1)$ ist gleichgeltend mit dem dortigen $\Gamma^{(n)} z^n$, und ${}^m\overset{n-r-1}{\mathfrak{A}} p^{n-r} \urcorner (r+1)$ ist ein allgemeines Glied des allgemeinen $(n+1)$ten Coefficientens. Vergl. Kästners Analysis des Unendlichen, §. 56. XIII.

Die oben angeführte Vergleichungstafel der Binomialcoefficienten gab sogleich nachstehende Relationen

$$^{m}\mathfrak{A} = \frac{2}{m-1}\,^{m}\mathfrak{B};\quad ^{m}\mathfrak{B} = \frac{3}{m-2}\,^{m}\mathfrak{C};$$

$$^{m}\mathfrak{C} = \frac{4}{m-1}\,^{m}\mathfrak{D};\quad ^{m}\mathfrak{D} = \frac{5}{m-1}\,^{m}\mathfrak{E};\ \text{rc.}$$

und, wenn man hierein nach und nach $^{n}m+1$, $^{n}m+2$, $^{n}m+3$, $^{n}m+4$, statt m substituiret, noch weiter folgende

$$^{^{n}m+1}\mathfrak{A} = \frac{2}{^{n}m}.\,^{^{n}m+1}\mathfrak{B} = + \frac{2}{^{n}m}.\,^{-^{n}m}\mathfrak{B}$$

$$^{^{n}m+2}\mathfrak{B} = \frac{3}{^{n}m}.\,^{^{n}m+2}\mathfrak{C} = - \frac{3}{^{n}m}.\,^{-^{n}m}\mathfrak{C}$$

$$^{^{n}m+3}\mathfrak{C} = \frac{4}{^{n}m}.\,^{^{n}m+3}\mathfrak{D} = + \frac{4}{^{n}m}.\,^{-^{n}m}\mathfrak{D}$$

$$^{^{n}m+4}\mathfrak{D} = \frac{5}{^{n}m}.\,^{^{n}m+4}\mathfrak{E} = - \frac{5}{^{n}m}.\,^{-^{n}m}\mathfrak{E}$$

rc. rc. rc.

Die Binomialcoefficienten hier zur Linken sind dieselben, wie sie in dem allgemeinen (n+1)ten Gliede der Eschenbachischen Umkehrungsformel A vorkommen. Substituirt man dafür ihre Werthe, wie sie hier rechter Hand stehen: so erhält man

$$y^{\Sigma}\rceil(n+1) = \frac{m}{^{n}m}\left\{\frac{-^{-^{n}m}\mathfrak{A}a^{n}A}{\alpha} + \frac{-^{-^{n}m}\mathfrak{B}b^{n}B}{\alpha^{2}} + \frac{-^{-^{n}m}\mathfrak{C}c^{n}C}{\alpha^{3}} + \ldots + \frac{-^{-^{n}m}\mathfrak{Z}n^{n}\mathcal{N}}{\alpha^{n}}\right\}\alpha^{-^{n}m}.z^{^{n}m}A$$

$$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots\end{pmatrix}$$

wie

wie solches in der dortigen veränderten Formel B steht *).

Was hier, in dem Werthe von $y^s\urcorner(n+1)$ zwischen den beiden Factoren $\frac{m}{{}^n m}$ und $z^{{}^n m\Lambda}$ steht, das ist, nach dem oben (S. 171.) angeführten Ausdrucke, der $(n+1)$te Coefficient der umzukehren gegebenen Reihe w zur Potenz des Exponentens $-{}^n m$ erhoben, oder $w^{-{}^n m}\varkappa(n+1)$. Daraus folgt der für die Umkehrung der Reihen so wichtige Satz, in Localzeichen ausgedrückt:

$$y^s\urcorner(n+1) = \frac{m}{{}^n m} . w^{-{}^n m}\varkappa(n+1) . z^{{}^n m l}$$

oder, wenn man für m, ${}^n m$, $\frac{m}{{}^n m}$, die zugehörigen Werthe $\frac{s}{p}$, $\frac{s+nd}{p}$, $\frac{s}{s+nd}$, setzt:

$$y^s\urcorner(n+1) = \frac{s}{s+nd} . w^{-\frac{s+nd}{p}}\varkappa(n+1) . z^{\frac{(s+nd)l}{p}}$$

Das heißt: das $(n+1)$te Glied der gesuchten Umkehrungsreihe (für y^s) ist ein Product des $(n+1)$ten Coefficientens der Potenz $-\frac{s+nd}{p}$ der gegebenen Reihe (w) in $\frac{s}{s+nd} z^{\frac{l(s+nd)}{p}}$

„Wenn also eine Reihe w oder $z^l = \alpha y^p + \beta y^{p+d} +$ „$\gamma y^{p+2d} +$ rc. gegeben ist, so findet man das $(n+1)$te Glied

*) In der Tafel VIII, A. steht die Eschenbachische Formel, wie sie in seiner Abhandlung vorkommt, in den dort gebrauchten Buchstaben. Die Formel B ist nur harmonischer, bezieht sich aber auch ganz auf die Eschenbachischen Buchstaben. In der Folge dieser Schrift, von dieser Stelle an, werde ich statt der Eschenbachischen Exponenten Λ, Π, Δ, Σ, die gleichgültigen Buchstaben l, p, d, s, gebrauchen.

„Glied der Potenz y^s durch Umkehrung, wenn man den „(n+1)ten Coefficienten der Potenz $-\frac{s+nd}{p}$ der gegebe„nen Reihe, in $\frac{s}{s+nd}$ multiplicirt, und dieses Product als „Coefficienten zu $z^{\frac{l(s+nd)}{p}}$ sezt.

Daraus folgen $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ nach und nach gesezt, die einzelnen Glieder nach der Ordnung:

$$y^s = \left(\frac{z^l}{\alpha}\right)^{\frac{s}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+d} . w^{-\frac{s+d}{p}} \varkappa . 2 . z^{\frac{l(s+d)}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+2d} . w^{-\frac{s+2d}{p}} \varkappa . 3 . z^{\frac{l(s+2d)}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+3d} . w^{-\frac{s+3d}{p}} \varkappa 4 . z^{\frac{l(s+3d)}{p}}$$

$$+ \text{u. s. w.}$$

Die Substitution von $n = 0$ fürs erste Glied, giebt $\frac{s}{s} w^{-\frac{s}{p}} \varkappa 1 . z^{\frac{ls}{p}}$, dafür ich hier den gleichgültigen Werth gesezt habe, wie man ihn für sich übersieht.

Der hier gefundene Satz ist um so wichtiger, weil er die nach dem gewöhnlichen Verfahren so sehr zusammengesezte und schwierige Umkehrung, auf eine für die combinatorische Analytik so leichte Aufgabe reducirt: ein verlangtes Glied (oder dessen Coefficienten) einer geforderten Potenz einer Reihe darzustellen. Die Localzeichen geben die Bestandtheile der Formel aufs deutlichste an, und diese lassen sich sogleich in combinatorische umsetzen. Eben dadurch werden diese Zeichen und Ausdrücke in der combinatorischen

Ang-

Analytik sehr wichtig, die ausserdem nur von sehr eingeschränkten Nutzen seyn würden.

Herr Magister Rothe ist in seinem allgemeinen Beweise für die Umkehrungsreihe r) auf dieselbe Localformel des (n+1)ten Gliedes directe gekommen, woraus klar erhellet, (was auch aus der leichten Nachweisung auf den (n+1)ten Coefficienten des allgemeinen Potenzentheorems sich schon ergiebt) daß nicht die Eschenbachische, sondern die von Herrn Hindenburg durch Substitution daraus abgeleitete Form die ursprüngliche sey. Dieser Rothische Beweis, welcher der Scharfsinnigkeit seines Erfinders Ehre macht, ist in Absicht auf Inhalt und Ausführung merkwürdig. Er gilt allgemein für jeden Werth, der in den Formeln vorkommenden Coefficienten und Exponenten, und alle Vordersätze sind, so wie der Hauptsatz selbst, Localformeln, die zum Theil sehr verwickelte bisher noch unbekannte Summenformeln darstellen. Auch ist der Beweis keinesweges etwa dadurch überflüssig, weil man doch die Eschenbachische Umkehrungsformel aus der de la Grangischen Auflösungsreihe herleiten kann, (S. 110.) von welcher leztern Herr Fischer in der Vorrede behauptet, ihr Erfinder habe dafür einen Beweis in aller Schärfe geführt, deren die Analysis fähig sey. Der Beweis ist zwar scharf, aber nicht allgemein; denn die Hauptformel

$$p^m = x^m + \frac{dx^m}{dx}\,\varphi x + \text{ꝛc.}$$

ist nur für den Fall erwiesen, wenn m eine ganze Zahl ist v). Freylich hat Herr de la Grange wohl übersehen, daß hier

r) In der Note π angeführten Abhandlung, §. 5.

v) Das erhellet zum Theil schon daraus, daß Herr de la Grange (§. 1. 2.) von dem Newtonischen Satze von Verhältniß der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer

hier m auch jede Zahl seyn kann, und dahin geht vermuthlich die Aeusserung, daß aus dieser Formel für p^m auf eine leichte Art (?) die oben (S. 102. 108.) angeführte Gleichung für jede Function ψp oder ψx fliesse. Die Rechtfertigung dieser Aeusserung, die Herr de la Grange für seine dortige Absicht nicht nöthig hatte, hätte Herr Fischer beybringen, und so den Beweis des Satzes ergänzen sollen, da er die Umkehrungsformel nicht selten auf Potenzen gebrochener rationaler und irrationaler Exponenten anwendet. Herr Fischer hat aber gar nicht einmal gesehen, daß in dem de la Grangischen Beweise, für die Ausdehnung, in welcher er den Satz braucht, noch etwas zurück sey, und Herr Magister Rothens ganz allgemein geführter combinatorischer Beweis, macht alle weitere Versuche überflüssig.

Die Nachweisung, welche obige Localformel für das (n+1)te Glied der Umkehrungsreihe auf den eben so vielten Coefficienten des allgemeinen Potenzentheorems giebt, ist die oben (S. 110.) versprochene weitere höchst fruchtbare Analyse des Fischerischen Ausdrucks der allgemeinen Auflösungsreihe. Diesen wichtigen Aufschluß verbarg ihm seine unvollkommene Zeichnung. Von was für ausgedehnten Folgen aber dieser Satz für das Fischerische Werk seyn konnte, will ich noch an einigen Beyspielen zeigen.

Auf-

ihrer Wurzeln, ausgeht, wo nur von ganzen Zahlen die Rede ist, und daß er (§. 3. 4. 5.) die dortigen Reihen nur so weit fortzusetzen gebietet, bis negative Potenzen von $\frac{b}{a}$ kommen. Am deutlichsten zeigen es §. 7. am Ende, ingleichen §. 8. und §. 9. am Ende auch §. 10. wo die Schritte von $p^1, p^2, p^3 \ldots$ auf p^m recht deutlich vor Augen gelegt werden. Die Hauptformel $p^m = x^m + \frac{dx^m}{dx} \phi x +$ 2c. (§. 14). ist keine andere als die §. 10. durch ξ ausgedrückte.

Aufgabe I. (Fischer §. 156. 157. ingleichen 368. 369.)

„Aus der transcendenten Gleichung $y = xe^x$ (wo e, wie „gewöhnlich, die Grundzahl des natürlichen Logarithmen„systems bedeutet) den Werth von x durch eine unendliche „Reihe auszudrücken."

Auflösung.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2..n-1} + \frac{x^n}{1.2.3..n}$$

also

$$e^{mx} = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{m^{n-1}x^{n-1}}{1.2..n-1} + \frac{m^nx^n}{1.2.3..n}$$

Nun ist $y = xe^x$ und $y^m = x^m e^{mx}$, folglich

$$y = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2..n-1} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3..n}$$

$$y^m = x^m + \frac{mx^{m+1}}{1} + \frac{m^2x^{m+2}}{1.2} + \frac{m^3x^{m+3}}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{m^{n-1}x^{m+n-1}}{1.2.3..n-1} + \frac{m^nx^{m+n}}{1.2.3..n}$$

wo hier die Reihen sämmtlich bis zum (n+1)ten Gliede fortgesezt sind.

Vergleicht man nun die hier gegebene Reihe

$$y = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3} \ldots = w$$

um x durch y auszudrucken, mit der oben (S. 173.) gegebenen allgemein ausgedruckten,

so ist hier $l = p = d = s = 1$

Also $\frac{s}{s+nd} = \frac{1}{1+n}$; $\frac{s+nd}{p} = 1 + n$, und (S. 172.)

$$x^{\rceil}(n+1) = \frac{1}{1+n}.w^{-(n+1)}\chi(n+1).y^{n+1}$$

der

Den geforderten $(n+1)$ten Coefficienten giebt die obige Reihe für y^m, wenn man darin $m = -(n+1)$, also $m^n = [-(n+1)]^n = \pm(n+1)^n$ sezt, das obere oder untere Zeichen, nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Das giebt

$$x\,7(n+1) = \pm \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n} y^{n+1}; \text{ d. i.}$$

$$x\,7(n+1) = \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n} y^{n+1}$$

Das erste Glied der Reihe für x ist y, wie die Formel (S. 173.) zeigt, und man auch ohne Umkehrung übersieht, die übrigen Glieder giebt die allgemeine Formel $x\,7(n+1)$ durch gehörige Substitution für n, und so kommt

$$x = y - \frac{1}{1}y^2 + \frac{3^1}{1.2}y^3 - \frac{4^2}{1.2.3}y^4 + \frac{5^3}{1.2.3.4}y^5 - \text{ꝛc.}$$

Anmerkung 1. Herr Fischern hat seine Auflösung (§. 156. S. 151.) auf ein allgemeines sehr zusammengeseztes Glied geführt, dessen Summirung a priori er (§. 157.) für schwer hält. Er sucht sie daher aus Induction durch Summirung der ersten Glieder in Zahlen, und findet dadurch a posteriori die Werthe für x und $x\,7(n+1)$ gerade so, wie hier steht. In der Folge (§. 368. 369.) kommt Herr Fischer noch einmal auf diese Aufgabe zurück, und findet dieselbe Summe für das allgemeine Glied durch Beyhülfe eines doppelten Werthes der Reihe für e^{nx}, durch mehrere Umwege und nach einer vierfachen Veränderung einer dort aufgeführten vielgliedrigen Formel D. Was Herr Fischer weitläuftig, zusammen auf vier Seiten vorträgt, schmilzt hier ganz bequem in eine einzige zusammen.

Anmerk. 2. Das allgemeine Glied ist auch hier, wie in andern Fällen, die Hauptsache. Sonst hätte man, wenn man blos die Glieder vom Anfange hätte haben wollen, selbige nach Anleitung obiger durch w ausgedruckten Localformel, vermittelst der Coefficienten der Reihe für y^m nach der Ordnung finden können, wenn man dafür nach und nach $m = -2; -3; -4; -5;$ u. s. w. gesezt hätte. Das würde

$$x = y + \frac{1}{2}(-2)y^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{(-3)^2}{1.2}y^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{(-4)^3}{1.2.3}y^4 + \text{etc.}$$

gegeben, und nach gehöriger Reduction, obige Reihe dargestellt haben. Die Substitution aus dem allgemeinen blos durch n und y ausgedrückten Gliede hilft also diese Reduction noch ersparen.

Aufgabe 2. (Fischer §. 159.)

„Es ist die transcendente Function $y = x^m e^{x^r}$ gegeben; „man soll x durch eine Reihe nach Potenzen von y aus„drücken."

Auflösung. Man drücke $y = x^m e^{x^r}$ und $y^\mu = x^{\mu m} e^{\mu x^r}$ durch Reihen aus.

$$\text{Nun ist } e^{x^r} = 1 + x^r + \frac{x^{2r}}{1.2} + \frac{x^{3r}}{1.2.3} + \ldots \frac{x^{(n-1)r}}{1.2.3..(n-1)} + \frac{x^{nr}}{1.2.3\ldots n}.$$

$$\text{und } e^{\mu x^r} = 1 + \mu x^r + \frac{\mu^2 x^{2r}}{1.2} + \frac{\mu^3 x^{3r}}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mu^{n-1} x^{(n-1)r}}{1.2.3..n-1} + \frac{\mu^n x^{nr}}{1.2.3\ldots n}$$

also

also $y = x^m + x^{m+r} + \frac{x^{m+2r}}{1.2} + \ldots \frac{x^{m+(n-1)r}}{1.2.3..n-1}$

$$+ \frac{x^{m+nr}}{1.2.3...n} = w$$

und $y^\mu = x^{\mu m} + \mu x^{\mu m+r} + \frac{\mu^2 x^{\mu m+2r}}{1.2} + \ldots \frac{\mu^{n-1} x^{\mu m+(n-1)r}}{1.2.3...n-1}$

$$+ \frac{\mu^n x^{\mu m+nr}}{1.2.3...n}$$

aber $x^t \daleth (n+1) = \frac{t}{t+nr} . w^{-\frac{t+nr}{m}} \varkappa (n+1) . y^{\frac{t+nr}{m}}$ (S. 172.)

Man setze also hier $\mu = -\frac{t+nr}{m}$, so kommt

$$w^{-\frac{t+nr}{m}} \varkappa (n+1) = \frac{\left[-\frac{t+nr}{m}\right]^n}{1.2.3...n} = \mp \frac{(t+nr)^n}{1.2.3..n.m^n}$$

also

$$x^t \daleth (n+1) = \mp \frac{t}{t+nr} . \frac{(t+nr)^n}{1.2.3..n.m^n} . y^{\frac{t+nr}{m}}$$

oder

$$x^t \daleth (n+1) = \mp \frac{t(t+nr)^{n-1}}{1.2.3...n.m^n} y^{\frac{t+nr}{m}}$$

Das obere oder untere Zeichen, nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Anmerk. 1. Sezt man hier $t = m = r = 1$, so erhält man den Werth für $x \daleth (n+1)$ der vorigen speciellern Aufgabe. Dort fand doch Herr Fischer noch den verkürzten Ausdruck durch Summirung der Reihe aus Induction. Aber hier, wo die Summirung schon schwieriger ist, wagt er es nicht einmal, sie wie dort a posteriori zu versuchen. Er verweist

sagt e), die Baukunst der Elemente ihre Vollkommenheit erstiegen zu haben. Die Erweiterung der Wissenschaft wird in der Folge mehrere Zeichen herbeyführen, aber an die Stelle der schon vorhandenen Grundzeichen lassen sich keine simplere, ausdruckvollere und harmonischere setzen; und sie verdienen daher, mit allgemeinem Beyfalle in der Analysis überhaupt an- und aufgenommen zu werden. Zu mehrern Beyspielen, die selbst in dieser Schrift vorkommen, will ich noch folgendes beyfügen, woraus man sehen wird, wie die Erreichung der möglichen Simplicität und Harmonie, die man an den Hindenburgischen Zeichen schon gewohnt ist, Veranlassung werden könne, zu neuen Wahrheiten und interessanten Sätzen zu gelangen.

Die Zeichnung der Umkehrungsformel, in Hindenburgischen Combinations- und Fischerischen Dimensionszeichen, wie sie hier Tafel VIII. A. und C. beysammen stehen, ist von einander sehr verschieden. Die Fischerische Darstellung scheint eine der Umkehrungsaufgabe eigenthümliche zu seyn, und läßt nicht vermuthen, man mag sie noch so lange und noch so aufmerksam betrachten, daß sich in ihr noch weiter etwas analysiren lasse. Aber die Eschenbachische Darstellung in combinatorischen Zeichen ist ungleich wissenschaftlicher, und blos die vermißte Harmonie in den einzelnen Gliedern der Formel, wo ungleichnamige Buchstaben der Binomialcoefficienten und der Combinationsclassen (𝔄 mit bB und 𝔅 mit cC und 𝔈 mit bD u. s. w.) mit einander verbunden sind, hat Herrn Hindenburg Veranlassung gegeben, nachzusehen, was aus der Formel werden würde, wenn man die Harmonie bey ihr ergänzte und sie ganz symmetrisch machte.

Die

e) Man sehe die Note d, und vergleiche S. 6. 49—51. 57. 58. Note oo und rr u. s. w.

Die oben angeführte Vergleichungstafel der Binomialcoefficienten gab sogleich nachstehende Relationen -

$$^{m}\mathfrak{A} = \frac{2}{m-1}\,^{m}\mathfrak{B};\quad ^{m}\mathfrak{B} = \frac{3}{m-2}\,^{m}\mathfrak{C};$$

$$^{m}\mathfrak{C} = \frac{4}{m-1}\,^{m}\mathfrak{D};\quad ^{m}\mathfrak{D} = \frac{5}{m-1}\,^{m}\mathfrak{E};\ \text{rc.}$$

und, wenn man hierein nach und nach $^{n}m+1$, $^{n}m+2$, $^{n}m+3$, $^{n}m+4$, statt m substituiret, noch weiter folgende

$$^{^nm+1}\mathfrak{A} = \frac{2}{^nm}.\,^{^nm+1}\mathfrak{B} = + \frac{2}{^nm}.\,^{-^nm}\mathfrak{B}$$

$$^{^nm+2}\mathfrak{B} = \frac{3}{^nm}.\,^{^nm+2}\mathfrak{C} = - \frac{3}{^nm}.\,^{-^nm}\mathfrak{C}$$

$$^{^nm+3}\mathfrak{C} = \frac{4}{^nm}.\,^{^nm+3}\mathfrak{D} = + \frac{4}{^nm}.\,^{-^nm}\mathfrak{D}$$

$$^{^nm+4}\mathfrak{D} = \frac{5}{^nm}.\,^{^nm+4}\mathfrak{E} = - \frac{5}{^nm}.\,^{-^nm}\mathfrak{E}$$

rc. rc. rc.

Die Binomialcoefficienten hier zur Linken sind dieselben, wie sie in dem allgemeinen (n+1)ten Gliede der Eschenbachischen Umkehrungsformel A vorkommen. Substituirt man dafür ihre Werthe, wie sie hier rechter Hand stehen: so erhält man

$$y^{\Sigma}\urcorner(n+1) = \frac{m}{^nm}\left\{\frac{^{-^nm}\mathfrak{A}a^nA}{\alpha} + \frac{^{-^nm}\mathfrak{B}b^nB}{\alpha^2} + \frac{^{-^nm}\mathfrak{C}c^nC}{\alpha^3} + \ldots + \frac{^{-^nm}\mathfrak{N}n^n\mathfrak{N}}{\alpha^n}\right\}\alpha^{-^nm}.\,z^{^nmA}$$

$$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots\end{pmatrix}$$

wie

wie solches in der dortigen veränderten Formel B steht *).

Was hier, in dem Werthe von $y^s\rceil(n+1)$ zwischen den beiden Factoren $\frac{m}{{}^nm}$ und $z^{{}^nm\Delta}$ steht, das ist, nach dem oben (S. 171.) angeführten Ausdrucke, der $(n+1)$te Coefficient der umzukehren gegebenen Reihe w zur Potenz des Exponentens $-{}^nm$ erhoben, oder $w^{-{}^nm}\varkappa(n+1)$. Daraus folgt der für die Umkehrung der Reihen so wichtige Satz, in Localzeichen ausgedrückt:

$$y^s\rceil(n+1) = \frac{m}{{}^nm}.w^{-{}^nm}\varkappa(n+1).z^{{}^nml}$$

oder, wenn man für m, ${}^nm$, $\frac{m}{{}^nm}$, die zugehörigen Werthe $\frac{s}{p}$, $\frac{s+nd}{p}$, $\frac{s}{s+nd}$, setzt:

$$y^s\rceil(n+1) = \frac{s}{s+nd}.w^{-\frac{s+nd}{p}}\varkappa(n+1).z^{\frac{(s+nd)l}{p}}$$

Das heißt: das $(n+1)$te Glied der gesuchten Umkehrungsreihe (für y^s) ist ein Product des $(n+1)$ten Coefficientens der Potenz $-\frac{s+nd}{p}$ der gegebenen Reihe (w) in $\frac{s}{s+nd}z^{\frac{l(s+nd)}{p}}$

„Wenn also eine Reihe w oder $z^l = \alpha y^p + \beta y^{p+d} +$ „$\gamma y^{p+2d} +$ ꝛc. gegeben ist, so findet man das $(n+1)$te Glied

*) In der Tafel VIII, A. steht die Eschenbachische Formel, wie sie in seiner Abhandlung vorkommt, in den dort gebrauchten Buchstaben. Die Formel B ist nur harmonischer, bezieht sich aber auch ganz auf die Eschenbachischen Buchstaben. In der Folge dieser Schrift, von dieser Stelle an, werde ich statt der Eschenbachischen Exponenten Λ, Π, Δ, Σ, die gleichgültigen Buchstaben l, p, d, s, gebrauchen.

„Glied der Potenz y^s durch Umkehrung, wenn man den „$(n+1)$ten Coefficienten der Potenz $-\frac{s+nd}{p}$ der gegebe„nen Reihe, in $\frac{s}{s+nd}$ multiplicirt, und dieses Product als „Coefficienten zu $z^{\frac{l(s+nd)}{p}}$ sezt.

Daraus folgen $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ nach und nach gesezt, die einzelnen Glieder nach der Ordnung:

$$y^s = \left(\frac{z^l}{\alpha}\right)^{\frac{s}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+d} . w^{-\frac{s+d}{p}} \varkappa . 2 . z^{\frac{l(s+d)}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+2d} . w^{-\frac{s+2d}{p}} \varkappa . 3 . z^{\frac{l(s+2d)}{p}}$$

$$+ \frac{s}{s+3d} . w^{-\frac{s+3d}{p}} \varkappa\, 4 . z^{\frac{l(s+3d)}{p}}$$

$+$ u. s. w.

Die Substitution von $n = 0$ fürs erste Glied, giebt $\frac{s}{s} w^{-\frac{s}{p}} \varkappa\, 1 . z^{\frac{ls}{p}}$, dafür ich hier den gleichgültigen Werth gesezt habe, wie man ihn für sich übersieht.

Der hier gefundene Satz ist um so wichtiger, weil er die nach dem gewöhnlichen Verfahren so sehr zusammengesezte und schwierige Umkehrung, auf eine für die combinatorische Analytik so leichte Aufgabe reducirt: ein verlangtes Glied (oder dessen Coefficienten) einer geforderten Potenz einer Reihe darzustellen. Die Localzeichen geben die Bestandtheile der Formel aufs deutlichste an, und diese lassen sich sogleich in combinatorische umsetzen. Eben dadurch werden diese Zeichen und Ausdrücke in der combinatorischen

Ang-

Analytik sehr wichtig, die ausserdem nur von sehr eingeschränkten Nutzen seyn würden.

Herr Magister Rothe ist in seinem allgemeinen Beweise für die Umkehrungsreihe τ) auf dieselbe Localformel des (n+1)ten Gliedes directe gekommen, woraus klar erhellet, (was auch aus der leichten Nachweisung auf den (n+1)ten Coefficienten des allgemeinen Potenztheorems sich schon ergiebt) daß nicht die Eschenbachische, sondern die von Herrn Hindenburg durch Substitution daraus abgeleitete Form die ursprüngliche sey. Dieser Rothische Beweis, welcher der Scharfsinnigkeit seines Erfinders Ehre macht, ist in Absicht auf Inhalt und Ausführung merkwürdig. Er gilt allgemein für jeden Werth, der in den Formeln vorkommenden Coefficienten und Exponenten, und alle Vordersätze sind, so wie der Hauptsatz selbst, Localformeln, die zum Theil sehr verwickelte bisher noch unbekannte Summenformeln darstellen. Auch ist der Beweis keinesweges etwa dadurch überflüssig, weil man doch die Eschenbachische Umkehrungsformel aus der de la Grangischen Auflösungsreihe herleiten kann, (S. 110.) von welcher leztern Herr Fischer in der Vorrede behauptet, ihr Erfinder habe dafür einen Beweis in aller Schärfe geführt, deren die Analysis fähig sey. Der Beweis ist zwar scharf, aber nicht allgemein; denn die Hauptformel

$$p^m = x^m + \frac{dx^m}{dx} \varphi x + \text{etc.}$$

ist nur für den Fall erwiesen, wenn m eine ganze Zahl ist υ). Freylich hat Herr de la Grange wohl übersehen, daß hier

τ) In der Note π angeführten Abhandlung, §. 5.

υ) Das erhellet zum Theil schon daraus, daß Herr de la Grange (§. 1. 2.) von dem Newtonischen Satze von Verhältniß der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer

hier m auch jede Zahl seyn kann, und dahin geht vermuthlich die Aeusserung, daß aus dieser Formel für p^m auf eine leichte Art (?) die oben (S. 102. 108.) angeführte Gleichung für jede Function ψp oder ψx fliesse. Die Rechtfertigung dieser Aeusserung, die Herr de la Grange für seine dortige Absicht nicht nöthig hatte, hätte Herr Fischer beybringen, und so den Beweis des Satzes ergänzen sollen, da er die Umkehrungsformel nicht selten auf Potenzen gebrochener rationaler und irrationaler Exponenten anwendet. Herr Fischer hat aber gar nicht einmal gesehen, daß in dem de la Grangischen Beweise, für die Ausdehnung, in welcher er den Satz braucht, noch etwas zurück sey, und Herr Magister Rothens ganz allgemein geführter combinatorischer Beweis, macht alle weitere Versuche überflüssig.

Die Nachweisung, welche obige Localformel für das $(n+1)$te Glied der Umkehrungsreihe auf den eben so vielten Coefficienten des allgemeinen Potenzentheorems giebt, ist die oben (S. 110.) versprochene weitere höchst fruchtbare Analyse des Fischerischen Ausdrucks der allgemeinen Auflösungsreihe. Diesen wichtigen Aufschluß verbarg ihm seine unvollkommene Zeichnung. Von was für ausgedehnten Folgen aber dieser Satz für das Fischerische Werk seyn konnte, will ich noch an einigen Beyspielen zeigen.

Auf-

ihrer Wurzeln, ausgeht, wo nur von ganzen Zahlen die Rede ist, und daß er (§. 3. 4. 5.) die dortigen Reihen nur so weit fortzusetzen gebietet, bis negative Potenzen von $\frac{b}{a}$ kommen. Am deutlichsten zeigen es §. 7. am Ende, ingleichen §. 8. und §. 9. am Ende auch §. 10. wo die Schritte von p^1, p^2, p^3... auf p^m recht deutlich vor Augen gelegt werden. Die Hauptformel $p^m = x^m + \frac{dx^m}{dx} \phi x +$ ꝛc. (§. 14). ist keine andere als die §. 10. durch ϵ ausgedrückte.

Aufgabe I. (Fischer §. 156. 157. ingleichen 368. 369.)

„Aus der transcendenten Gleichung $y = xe^x$ (wo e, wie „gewöhnlich, die Grundzahl des natürlichen Logarithmen„systems bedeutet) den Werth von x durch eine unendliche „Reihe auszudrücken.“

Auflösung.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2..n-1} + \frac{x^n}{1.2.3..n}$$

also

$$e^{mx} = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{m^{n-1}x^{n-1}}{1.2..n-1} + \frac{m^nx^n}{1.2.3..n}$$

Nun ist $y = xe^x$ und $y^m = x^m e^{mx}$, folglich

$$y = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2..n-1} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3..n}$$

$$y^m = x^m + \frac{mx^{m+1}}{1} + \frac{m^2x^{m+2}}{1.\ 2} + \frac{m^3x^{m+3}}{1.\ 2.\ 3} + \ldots$$

$$+ \frac{m^{n-1}x^{m+n-1}}{1.2.3..n-1} + \frac{m^nx^{m+n}}{1.2.3..n}$$

wo hier die Reihen sämmtlich bis zum $(n+1)$ten Gliede fortgesetzt sind.

Vergleicht man nun die hier gegebene Reihe

$$y = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3} \ldots = w$$

um x durch y auszudrucken, mit der oben (S. 173.) gegebenen allgemein ausgedruckten,

so ist hier $l = p = d = s = 1$

Also $\frac{s}{s+nd} = \frac{1}{1+n}$; $\frac{s+nd}{p} = 1 + n$, und (S. 172.)

$$x\rceil(n+1) = \frac{1}{1+n} . w^{-(n+1)} \chi(n+1) . y^{n+1}$$

der

Den geforderten $(n+1)$ten Coefficienten giebt die obige Reihe für y^m, wenn man darin $m = -(n+1)$, also $m^n = [-(n+1)]^n = \pm(n+1)^n$ sezt, das obere oder untere Zeichen, nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Das giebt

$$x\text{\textfrak{Z}}(n+1) = \pm \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n} y^{n+1}; \text{ d. i.}$$

$$x\text{\textfrak{Z}}(n+1) = \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n} y^{n+1}$$

Das erste Glied der Reihe für x ist y, wie die Formel (S. 173.) zeigt, und man auch ohne Umkehrung übersieht, die übrigen Glieder giebt die allgemeine Formel $x\text{\textfrak{Z}}(n+1)$ durch gehörige Substitution für n, und so kommt

$$x = y - \frac{1}{1}y^2 + \frac{3^1}{1.2}y^3 - \frac{4^2}{1.2.3}y^4 + \frac{5^3}{1.2.3.4}y^5 - \text{rc.}$$

Anmerkung 1. Herr Fischern hat seine Auflösung (§. 156. S. 151.) auf ein allgemeines sehr zusammengeseztes Glied geführt, dessen Summirung a priori er (§. 157.) für schwer hält. Er sucht sie daher aus Induction durch Summirung der ersten Glieder in Zahlen, und findet dadurch a posteriori die Werthe für x und $x\text{\textfrak{Z}}(n+1)$ gerade so, wie hier steht. In der Folge (§. 368. 369.) kommt Herr Fischer noch einmal auf diese Aufgabe zurück, und findet dieselbe Summe für das allgemeine Glied durch Beyhülfe eines doppelten Werthes der Reihe für e^{nx}, durch mehrere Umwege und nach einer vierfachen Veränderung einer dort aufgeführten vielgliedrigen Formel D. Was Herr Fischer weitläuftig, zusammen auf vier Seiten vorträgt, schmilzt hier ganz bequem in eine einzige zusammen.

Anmerk. 2. Das allgemeine Glied ist auch hier, wie in andern Fällen, die Hauptsache. Sonst hätte man, wenn man blos die Glieder vom Anfange hätte haben wollen, selbige nach Anleitung obiger durch w ausgedruckten Localformel, vermittelst der Coefficienten der Reihe für y^m nach der Ordnung finden können, wenn man dafür nach und nach $m = -2;\ -3;\ -4;\ -5;$ u. s. w. gesezt hätte. Das würde

$$x = y + \frac{1}{2}(-2)y^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{(-3)^2}{1.2}y^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{(-4)^3}{1.2.3}y^4 + \text{etc.}$$

gegeben, und nach gehöriger Reduction, obige Reihe dargestellt haben. Die Substitution aus dem allgemeinen blos durch n und y ausgedrückten Gliede hilft also diese Reduction noch ersparen.

Aufgabe 2. (Fischer §. 159.)

„Es ist die transcendente Function $y = x^m e^{x^r}$ gegeben; „man soll x durch eine Reihe nach Potenzen von y ausdrücken."

Auflösung. Man drücke $y = x^m e^{x^r}$ und $y^\mu = x^{\mu m} e^{\mu x^r}$ durch Reihen aus.

Nun ist $$e^{x^r} = 1 + x^r + \frac{x^{2r}}{1.2} + \frac{x^{3r}}{1.2.3} + \ldots \frac{x^{(n-1)r}}{1.2.3..(n-1)} + \frac{x^{nr}}{1.2.3\ldots n}$$

und $$e^{\mu x^r} = 1 + \mu x^r + \frac{\mu^2 x^{2r}}{1.2} + \frac{\mu^3 x^{3r}}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mu^{n-1} x^{(n-1)r}}{1.2.3..n-1} + \frac{\mu^n x^{nr}}{1.2.3\ldots n}$$

also

also $y = x^m + x^{m+r} + \frac{x^{m+2r}}{1.2} + \ldots \frac{x^{m+(n-1)r}}{1.2.3..n-1} + \frac{x^{m+nr}}{1.2.3...n} = w$

und $y^\mu = x^{\mu m} + \mu x^{\mu m+r} + \frac{\mu^2 x^{\mu m+2r}}{1.2} + \ldots \frac{\mu^{n-1} x^{\mu m+(n-1)r}}{1.2.3...n-1} + \frac{\mu^n x^{\mu m+nr}}{1.2.3..n}$

aber $x^t \urcorner (n+1) = \frac{t}{t+nr} . w^{-\frac{t+nr}{m}} \varkappa(n+1) . y^{\frac{t+nr}{m}}$ (S. 172.)

Man setze also hier $\mu = -\frac{t+nr}{m}$, so kommt

$$w^{-\frac{t+nr}{m}} \varkappa(n+1) = \frac{\left(-\frac{t+nr}{m}\right)^n}{1.2.3...n} = \mp \frac{(t+nr)^n}{1.2.3..n.m^n}$$

also

$$x^t \urcorner (n+1) = \mp \frac{t}{t+nr} . \frac{(t+nr)^n}{1.2.3..n.m^n} . y^{\frac{t+nr}{m}}$$

oder

$$x^t \urcorner (n+1) = \mp \frac{t(t+nr)^{n-1}}{1.2.3...n.m^n} y^{\frac{t+nr}{m}}.$$

Das obere oder untere Zeichen, nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Anmerk. 1. Setzt man hier $t = m = r = 1$, so erhält man den Werth für $x \urcorner (n+1)$ der vorigen speciellern Aufgabe. Dort fand doch Herr Fischer noch den verkürzten Ausdruck durch Summirung der Reihe aus Induction. Aber hier, wo die Summirung schon schwieriger ist, wagt er es nicht einmal, sie wie dort a posteriori zu versuchen. Er ver-

 weist

weiß daher die Auflösung auf seine allgemeine Auflösungsreihe (Tafel III: A. und hier Tafel VIII. C.) nach welcher

$$x^t \mathfrak{A}(n+1) = \Big\{ -\frac{t}{m} a^n A + \frac{t(t+nr+m)}{m.\,2m} b^n B - \frac{t(t+nr+m)(t+nr+2m)}{m.\,2m.\,3m} c^n C + \ldots ! \mp \frac{t(t+nr+m)(t+nr+2m)}{m.\,2m.\,3m\ldots} \cdot \frac{(t+nr+[n-1]m)}{nm} n^{2n}\mathfrak{A} \Big\} y^{\frac{t+nr}{m}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2.3.4} & \ldots \end{pmatrix}$$

Ich habe hier statt der Fischerischen Dimensionszeichen die zur Auflösung bequemeren Hindenburgischen Combinationszeichen in die Fischerische Formel gesetzt.

Anmerk. 2. Wenn man diese weitschichtige Formel mit dem kurzen Ausdrucke $\mp \frac{t(t+nr)^{n-1}}{1.2.3..n.m^n} y^{\frac{t+nr}{m}}$ vergleicht, so zeigt sich die Wichtigkeit der Hindenburgischen Reduction der Coefficienten der Umkehrungsformel auf Coefficienten der Potenzformel sehr deutlich und einleuchtend; weil diese Reduction directe auf die Summirung führt, durch welche man diesen kurzen sehr netten Ausdruck erhält. Verkürzte Potenzformeln geben so allemal verkürzte Umkehrungsformeln.

Aufgabe 3. (Fischer §. 154.)

„Die verkürzten Dimensionszeichen in der allgemeinen „Auflösungsreihe auf vollständige zu reduciren."

Auflösung. Um x^t aus dem allgemeinen Schema

$$y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} \text{ ic.} = w$$

in

in vollständigen Dimensionszeichen auszudrücken, darf man nur das allgemeine $(p+1)$te Glied der Auflösungsreihe so ausdrücken. Es ist aber (S. 172.)

$$x^t\mathfrak{I}(p+1) = \frac{t}{t+pr}.w^{-\frac{t+pr}{m}}\varkappa(p+1).y^{\frac{t+pr}{m}}$$

wo es also nur darauf ankommt, den $(p+1)$ten Coefficienten der Potenz $w^{-\frac{t+pr}{m}}$ in vollständigen Dimensionszeichen darzustellen; welches aus §. 149. S. 139. geschehen kann, wo der Werth des dortigen Q den $(p+1)$ten Coefficienten der Potenz w^n in solchen Zeichen angiebt. Es ist aber, in Hindenburgischen Ausdrücken, mit Beybehaltung der dortigen doppelten Zeichen

$$Q \text{ oder } w^n\varkappa(p+1) = \Big[\mp {}^n\mathfrak{A}\, {}^{n-2}\overset{-1}{\mathfrak{P}} A^{n-1} a^{p+1} A$$

$$\pm {}^n\mathfrak{B}\, {}^{n-3}\overset{-2}{\mathfrak{P}} A^{n-2} b^{p+2} B \mp {}^n\mathfrak{C}\, {}^{n-4}\overset{-3}{\mathfrak{P}} A^{n-3} c^{p+3} C$$

$$\pm {}^n\mathfrak{D}\, {}^{n-5}\overset{-4}{\mathfrak{P}} A^{n-4} b^{p+4} D \ldots + {}^n\mathfrak{P}.1\, A^{n-p} p^{2p} \mathfrak{P}\Big]$$

wobey zu merken, daß $\overset{-1}{\mathfrak{P}}$, $\overset{-2}{\mathfrak{P}}$... jederzeit $p-1$, $p-2$ &c. Factoren oben, und eben so viel unten haben, also jeder dieser zweyten Binomialcoefficienten mit dem Factor $n-p$ im Zähler sich endet. Der lezte erste ${}^n\mathfrak{P}$ endiget sich oben in $n-p+1$ φ).

Diesen

φ) Bringt man aber alle Glieder auf +, so sieht das allgemeine Glied so aus:

$$w^n\varkappa(p+1) = {}^n\mathfrak{A}\,{}^{-(n-p)}\overset{-1}{\mathfrak{P}} A^{n-1} a^{p+1} A +$$

$${}^n\mathfrak{B}\,{}^{-(n-p)}\overset{-2}{\mathfrak{P}} A^{n-2} b^{p+2} B + {}^n\mathfrak{C}\,{}^{-(n-p)}\overset{-3}{\mathfrak{P}} A^{n-3} c^{p+3} C +$$

$$\ldots + {}^n\mathfrak{P}.1\, A^{n-p} p^{2p} \mathfrak{P}$$

Diesen Coefficienten multiplicire man mit $\frac{t}{t+pr}$, setze $n = -\frac{t+pr}{m}$; $A = 1$, und setze das zusammen als Coefficienten zu $y^{\frac{t+pr}{m}}$, so hat man $x^{t}\rceil(p+1)$ in vollständigen Combinationszeichen ausgedrückt, und kann daraus die einzelnen Glieder ableiten.

Anmerk. 1. Diese Reduction ist weit kürzer als die Fischerische, die gegen vier Quartseiten einnimmt: woran abermals die Unkunde jenes Hauptsatzes und die weitschweifige Fischerische Zeichnung Schuld ist.

Anmerk. 2. Die Reduction der verkürzten Dimensionszeichen in einer Formel auf vollständige, und umgekehrt, ist für die Anwendung von keinem grossen Belang, und der Umstand, daß das Gesetz der Reihe oft auch in der gewöhnlichen Bezeichnung noch sichtbar bleibt, vergütet die Unbequemlichkeiten nicht, die sich bey der grössern Anzahl von Gliedern, von denen sich mehrere wieder aufheben, einfinden. Indessen hat Herr Hindenburg schon dergleichen Relationen (Nov. Syst. Comb. p. LV. 9.) angegeben, und ist auch hier Herrn Fischer vorangegangen. Er hat aber nachher mehrere noch viel wichtigere gefunden. Die eigentliche Absicht geht auf Verkürzung, um mehrere Glieder in eins zusammen zu fassen, nicht umgekehrt, eins in mehrere zu zerlegen, wenn diese Zerlegung nicht besondere Vortheile gewährt, die die mehrere Arbeit auf einem andern Wege wieder reichlich vergüten; neue Aussichten eröffnen, noch nie betretene Wege bahnen, u. s. w.

Aufgabe 4. (Fischer §. 164. 165.)

„Aus der Gleichung $y = x - x^3$, den Werth von „$\frac{1+x^2}{1-x^2}$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken."

Auflö-

Auflösung. Man setze $\frac{x^2}{1-x^2} = v$, so ist $y^2 = v(1+v)^{-3}$,

also $y^2 = v + {}^{-3}\mathfrak{A}v^2 + {}^{-3}\mathfrak{B}v^3 + {}^{-3}\mathfrak{C}v^4 + \ldots {}^{-3}\mathfrak{N}v^{n+1} = w$

und $y^{2m} = v^m + {}^{-3m}\mathfrak{A}v^{m+1} + {}^{-3m}\mathfrak{B}v^{m+2} + {}^{-3m}\mathfrak{C}v^{m+3} + \ldots + {}^{-3m}\mathfrak{N}v^{m+n}$

Nun ist (S. 172.) das $(n+1)$te Glied der gesuchten Umkehrungsreihe ein Product des $(n+1)$ten Coefficientens der Potenz $-(1+n)$ der gegebenen Reihe w in $\frac{1}{1+n}\, y^{2(n+1)}$, weil hier $l = 2$, $p = d = s = 1$, $\frac{s+nd}{p} = 1+n$, $\frac{s}{s+nd} = \frac{1}{1+n}$ und $\frac{l(s+nd)}{p} = 2(1+n)$ ist; also

$$v](n+1) = \frac{1}{1+n}\, {}^{3(n+1)}\mathfrak{N}y^{2(n+1)}$$

daraus die einzelnen Glieder abgeleitet, wenn man für m successive 0, 1, 2, 3, 4... setzt, giebt

$$v = y^2 + \frac{1}{2}\,{}^{3\cdot2}\mathfrak{A}y^4 + \frac{1}{3}\,{}^{3\cdot3}\mathfrak{B}y^6 + \frac{1}{4}\,{}^{3\cdot4}\mathfrak{C}y^8 + \ldots$$
$$= \frac{x^2}{1-x^2}$$

Nun multiplicire man beiderseits mit 2, und addire zu beiden Seiten 1, so hat man das Gesuchte:

$$\frac{2x^2}{1-x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + 2y^2 + \frac{2}{2}.{}^{3\cdot2}\mathfrak{A}y^4 + \frac{2}{3}.{}^{3\cdot3}\mathfrak{B}y^6$$
$$+ \frac{2}{4}\,{}^{3\cdot4}\mathfrak{C}y^8 + \ldots \frac{2}{1+n}.{}^{3(n+1)}\mathfrak{N}y^{2(n+1)}$$

Anmerkung. Man sieht also, wie durch eine geschicktere Analysis die weiten Umwege vermieden werden können, die

die Herr Fischer zu nehmen gezwungen war, der überall gerade auf die Reihen losgeht.

Aufgabe 5. (Fischer §. 166. 167.)

„Aus der Gleichung $y = x - x^3$ den Werth des Log. „nat x, durch eine unendliche Reihe auszudrücken."

Auflösung. Es ist $y^m = (x - x^3)^m$, d. i.

$$y^m = x^m - {}^m\mathfrak{A}x^{m+2} + {}^m\mathfrak{B}x^{m+4} - {}^m\mathfrak{C}x^{m+6} + \ldots \pm {}^m\mathfrak{N}x^{m+2n}$$

Nach obiger Regel (S. 172.) erhält man, wenn man $p = l = 1$ und $d = 2$ setzt,

$$x^s = y^s - \frac{s}{s+2} \cdot {}^{-(s+2)}\mathfrak{A}y^{s+2} + \frac{s}{s+4} \cdot {}^{-(s+4)}\mathfrak{B}y^{s+4} - \frac{s}{s+6} \cdot {}^{-(s+6)}\mathfrak{C}y^{s+6} + \ldots \pm \frac{s}{s+2n} \cdot {}^{-(s+2n)}\mathfrak{N}y^{s+2n}$$

Nun ist aber $Lx = \frac{x^s - 1}{s}$, für $s = 0$, folglich ist

$$Lx = \frac{x^s - 1}{s} = \frac{y^s - 1}{s} - \frac{1}{s+2} \cdot {}^{-(s+2)}\mathfrak{A}y^{s+2} + \frac{1}{s+4} \cdot {}^{-(s+4)}\mathfrak{B}y^{s+4} - \frac{1}{s+6} \cdot {}^{-(s+6)}\mathfrak{C}y^{s+6} + \ldots \pm \frac{1}{s+2n} \cdot {}^{-(s+2n)}\mathfrak{N}y^{s+2n}$$

und so hat man endlich, wenn man für $\frac{y^s - 1}{s} = Ly$, und für $s = 0$ setzt, das Gesuchte

$$Lx = Ly - \frac{1}{2} \cdot {}^{-2}\mathfrak{A}y^2 + \frac{1}{4} \cdot {}^{-4}\mathfrak{B}y^4 - \frac{1}{6} \cdot {}^{-6}\mathfrak{C}y^6 + \ldots \pm \frac{1}{2n} \cdot {}^{-2n}\mathfrak{N}y^{2n}$$

oder

oder auch (S. 169.)

$$Lx = Ly + \frac{1}{2}\,{}^{2}\mathfrak{A}y^{2} + \frac{1}{4}\,{}^{5}\mathfrak{B}y^{4} + \frac{1}{6}\,{}^{8}\mathfrak{C}y^{6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2n}\,{}^{3n-1}\mathfrak{N}y^{2n}$$

Anmerk. Auf diese Art läßt sich auch die Aufgabe §. 168. kurz und allgemein auflösen.

Wie sehr man überall in dem Fischerischen Werke die Vortheile einer geschickten Analysis vermißt, mag, ausser den bereits angeführten, zum Schluß noch ein Beyspiel zeigen.

Aufgabe 6. (Fischer §. 121.)

„Die Reihe Log. $(1+z) = z - \frac{1}{2}z^{2} + \frac{1}{3}z^{3} - \frac{1}{4}z^{4} +$
„u. s. w. durch Substitution $z = \frac{x}{(1-x)^{2}}$, so umzuformen,
„daß die umgeformte Reihe nach Potenzen von x fortschreite."

Auflösung. Es ist

$$\text{Log.}\left[1 + \frac{x}{(1-x)^{2}}\right] = \text{Log.}\left[1 + \frac{x^{2}}{(1-x)}\right] - \text{Log.}(1-x)$$

Folglich ist, wenn man diese beiden Log. in Reihen auflößt,

$$L\left[1 + \frac{x}{(1-x)^{2}}\right] = x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{4}}{4} + \frac{x^{5}}{5} + \frac{x^{6}}{6} + \ldots + \frac{x^{n}}{n}$$
$$+ 1.x^{2} + 1.x^{3} + 1.x^{4} + 1.x^{5} + 1.x^{6} + \ldots + 1.x^{n}$$
$$- \frac{1.x^{4}}{2} - \frac{2.x^{5}}{2} + \frac{3.x^{6}}{2} + \ldots - \frac{{}^{n-3}\mathfrak{A}}{2}x^{n}$$
$$+ \frac{1.x^{6}}{3} + \ldots + \frac{{}^{n-4}\mathfrak{B}}{3}x^{n}$$
$$- \frac{{}^{n-5}\mathfrak{C}}{4}x^{n}$$

Der

Der allgemeine Ausdruck für das nte Glied ist also:

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{2}+\frac{\mathfrak{B}^{n-4}}{3}-\frac{\mathfrak{C}^{n-5}}{4}+\frac{\mathfrak{D}^{n-6}}{5}\ldots\ldots \mp\frac{\mathfrak{M}^{n-(m+2)}}{m+1}\right)x^n$$

Das obere oder untere Zeichen, nach dem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Von diesem Coefficienten in x^n nimmt man, für $n=1$ das erste Glied 1, für andere Werthe der ganzen positiven Zahl n aber, so viel Glieder vom ersten an, inclusive, mit ihren Zeichen nach der Reihe, bis die Exponenten der grossen deutschen Buchstaben Null oder negativ werden.

Wo das geschieht, kann selbst der allgemeine mte Binomialcoefficient hier nachweisen, wenn man bey ihm den Werth von m durch n so bestimmt, daß er zugleich der lezte wird, mit welchem die Reihe abbricht. Zu dieser Absicht

$$\text{ist } m=\frac{2n-5+(-1)^n}{4}=\frac{2n-5\pm 1}{4}=\frac{n-\binom{2}{3}}{2}$$

$$\text{und } n-(m+2)=\frac{2n-3\mp 1}{4}=\frac{n-\binom{2}{1}}{2}$$

Das obere oder untere Zeichen, die obere oder untere Zahl, (in beiden Fällen) nach dem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Der Werth von m, nach obiger Bestimmung durch n, wird allemal eine ganze Zahl seyn, und so wird die Reihe jederzeit

für $m = 1 \quad 2 \quad 3 \ldots$

mit $\mp\frac{\mathfrak{M}^{n-(m+2)}}{m+1}=-\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{n-3};+\frac{1}{3}\mathfrak{B}^{n-4};-\frac{1}{4}\mathfrak{C}^{n-5}\ldots$

abbre-

abbrechen; wo man nur noch hier den Werth von n in die Exponenten substituiren muß, der m = 1, 2, 3 ... gemacht hat.

Exempel. Für n = 12 wird m = 5, und auch n — (m + 2) oder $\frac{n-2}{2} = 5$. Die Reihe bricht also mit $-\frac{1}{6}{}^5\mathfrak{E}$ ab, und das gesuchte Glied ist

$$\left(\frac{13}{12} - \frac{1}{2}{}^9\mathfrak{A} + \frac{1}{3}{}^8\mathfrak{B} - \frac{1}{4}{}^7\mathfrak{C} + \frac{1}{5}{}^6\mathfrak{D} - \frac{1}{6}{}^5\mathfrak{E}\right)x^{12} = 0x^{12}$$

Herr Fischer erinnert (§. 123.) die Umformung der Reihen, wohin die vorige Aufgabe gehört, sey eine der Materien, über welche vermittelst der Dimensionszeichen und der von ihm aufgelöseten Aufgaben eine sehr vollständige Theorie festgesezt werden kann. Besonders bleibe keine Umformung durch Substitution denkbar, die nicht vermittelst seiner Methode ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden könnte. Herrn Fischers Umformungen gehen genau nur so weit, als der Hindenburgische Methodus Potentiarum ausreicht. Dieser begreift aber nur die einfachen Substitutionen, wo z. B. eine nach x geordnete Reihe in eine nach y geordnete ausgedrückt oder umgeformt werden soll, wenn die Relation zwischen x und y gegeben ist. Die zusammengesezte Substitution (Substitutio continua nennt sie Herr Hindenburg Nov. Syst. Comb. p. XXVII. XXVIII.) hat Herr Fischer gar nicht berührt. Es ist also zu viel gesagt, wenn er behauptet, es sey keine Umformung durch Substitution gedenkbar, die sich nicht auf dem von ihm gezeigten Wege bewerkstelligen lasse. Die Umformung durch zusammengesezte Substitution ist für die Analysis genau eben dasselbe, was die Kettenregel für die gemeine Arithmetik ist. Hier werden äussere Glieder vermittelst eines oder mehrerer Zwischenglieder, deren Verhältnisse gegen einander gegeben sind, ausgedrückt; dort werden es Functionen, vermittelst gegebe-

ner

ner Relationen ihrer veränderlichen Grössen gegen einander. Doch vielleicht rechnet Herr Fischer die Aufgaben, die auf dergleichen zusammengesetzten Substitutionen beruhen, zu denen, die er (Vorrede S. V.) für unauflösbar hält; auch würde er, ohne den Gebrauch der Localausdrücke, den er nicht kennt, hier gar nicht fortkommen, wenigstens nicht ohne ermüdende Weitläuftigkeiten.

Die hier beygebrachten Aufgaben mit ihren Auflösungen sind mehr als hinreichend, zu zeigen, in was für Weitläuftigkeiten Herr Fischer oft dadurch verfällt, daß er bey einer vorgegebenen Aufgabe immer geradezu die Auflösung beginnt, selbst gegebene endliche Ausdrücke sogleich in Reihen verwandelt, um nur seine Formeln anwenden zu können, ohne zuvor zu überdenken, wie eine vorbereitende Analysis dazu dienen könne, das Gesuchte durch diese Formeln auf einem viel leichtern Wege zu finden. Auch fällt hier sehr deutlich in die Augen, wie sehr Herr Fischer durch seine beschränkte, wenig wissenschaftliche, Bezeichnungsart gehindert worden ist, wichtige Aufschlüsse, selbst bey der Aufgabe, die er für die wichtigste in der ganzen Analysis hält, (§. 90.) wahrzunehmen, die ihm doch so nahe lagen, und worauf Herrn Hindenburg seine Zeichen geradezu (S. 170. 171.) leiteten. Es ist also so wenig gegründet, was Herr Fischer in der Vorrede (S. V.) seinen Lesern insinuirt, daß seine Bezeichnungsart, als die einzige einfache und leichte, wie er sie nennt, etwas möglich machen oder darstellen könne, was der Hindenburgischen versagt wäre, daß vielmehr jene, als eine ungetreue sehr vernachlässigte Copie, unendlich weit hinter dem Originale zurückbleibt. Das erhellet aus unzähligen Stellen dieser Schrift, und ich bin überzeugt, Herr Fischer selbst wird nunmehr die angeblichen Vorzüge seiner Bezeichnungsart vor der Hindenburgischen, wenn er ja im Ernste daran geglaubt hat, sogleich aufgeben, und sie für das halten, was sie wirklich sind — leere Einbildungen.

Wenn

Wenn ich bisher von der Vortreflichkeit der Hindenburgischen Bezeichnungsart, und von ihren Vorzügen vor der Fischerischen gesprochen habe, so habe ich überall diejenige verstanden, wie sie in der Schrift Nov. Syst. Comb. erklärt und gebraucht worden, indem selbige in vielen Stücken weit vollkommener und vollständiger ist, als jene, in der zwey Jahre frühern Schrift Inf. Dign. vorkommende. In Nov. Syst. Comb. werden die Aufgaben immer auf allgemein ausgedruckte Reihen $az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} +$ ꝛc. bezogen, welches die Anwendung auf specielle Fälle erleichtert und manche Reduction erspart, auch ist die Bezeichnung der Binomialcoefficienten darin verbessert, Distanzexponenten sind in Umlauf gebracht, die Classenzeichen, wo es nöthig ist, sind mit Reihenbuchstaben versehen, mehrere Relationen der combinatorischen Zeichen unter sich und mit Localausdrücken für Glieder und Coefficienten sind angegeben worden, u. s. w. Alles Einrichtungen, die recht eigentlich dahin abzielen, die Zeichen ganz wissenschaftlich und zu Erfindung bequem zu formen, und dadurch eine lebendige Darstellung der Dinge und ihres Verhaltens gegen einander durch dergleichen stellvertretende Zeichen zu begründen und festzusetzen.

Wer also von Herrn Hindenburgs combinatorischer Analytik aus seinen Schriften sich gründlich unterrichten will, der muß sein Novum Systema dabey zum Grunde legen, und die darin citirten Stellen aus dem Infin. Dign. gelegentlich nachlesen, welche nicht selten sehr wichtige Gründe des combinatorischen Verfahrens enthalten, die für die neuere Schrift nicht wiederholt werden durften. Dadurch wird er bald in Stand gesezt werden, auch das übrige, was aus der erstern Schrift nicht angeführt wird, oder in andern Hindenburgischen, oben (S. 26.) citirten Schriften zerstreut vorkommt, zu übersehen. Das Nov. Syst. Comb. ist nicht, wie einige sich irrig vorstellen, eine Fortsetzung von den Inf. Dign. so, daß man diese Schrift vor jener lesen müsse. Keinesweges. Das Nov. Syst.

enthält

enthält die wesentlichen Gründe und Operationen der neufundirten Combinationslehre, an sich und in Beziehung auf die Analysis, trägt die ausdrucksvolle combinatorisch-analytische Zeichensprache ausführlich vor, zeigt Anwendung der Combinationen und dieser Sprache auf einige wichtige Aufgaben über die Reihen, ihre Producte, Quotienten und Potenzen (erstere beide in ausführlichen Tafeln, von leztern nur die beiden Hauptformeln, (p. LIV.) weil davon in Inf. Dign. schon ausführlich gehandelt worden) und theilt zugleich einen nützlichen weitaussehenden Entwurf über mehrere Aufgaben der combinatorischen Analytik, von sehr ausgedehntem Umfange, mit. Ob aber schon das Nov. Syst. keine Fortsetzung der Inf. Dign. ist, so ist doch jene Schrift durch diese veranlaßt worden (man sehe die Vorr. zu Inf. Dign. p. XII. seq.) und enthält leztere manches Gute und Vortrefliche, was in der Folgeschrift nicht wiederholt werden durfte.

Auch, hoffe ich, soll gegenwärtige Schrift und die beygefügten Tafeln sehr viel beytragen, die Hindenburgische Methode in der Kürze kennen zu lernen, und ihre Vergleichung mit dem Fischerischen Verfahren durchzusehen. Die hier befindlichen beiden Tafeln I. und VI. enthalten zwar nur diejenigen Hindenburgischen Zeichen und Aufgaben, welche zu Vergleichung der Fischerischen hier beyzubringen nöthig waren, wer aber auch nur was in diesen Tafeln und den dort angeführten Stellen steht, nachlesen und mit dem, was hin und wieder in dieser Schrift über die Zeichnung und Methode selbst erinnert worden ist, vergleichen will, der wird schon dadurch in vollkommenen Besitz derselben sich setzen; und ich bin gut dafür, es wird Niemanden, selbst dem größten Analysten nicht, die darauf verwendete Zeit und Mühe gereuen: denn, ausser den vielen neuen Hülfsmitteln des Calculs lernt er auch zugleich den bisher mit heiligem Dunkel bedeckten Zugang zu der absoluten Quelle kennen, aus welcher die Arithmetik mit ihren Zahlensystemen und die unermeßliche Analysis ihren Ursprung nimmt.

Druckfehler.

Seite 14. Zeile 6. statt mögliche Art lese man: Arten. S. 16. Z. 4. von unten st. gelößt hat i). Da Herr l. gelößt hat i); da Herr S. 22. Z 19. st. mirificia l. mirifica. S. 28. Z. 15. st. Hauptwerk l. Hauptwerke. Ebend. Note s Z. 14. st. *l'indigue* l. *l'indique*. Z. 16. *quelques nes* l. *quelques vues*. Z. 18. st. *surces* l. *sur ces*. S. 29. in der Note Z. 3. Quartseiten; l. Quartseiten betragen; S. 36. Z. 20. st. aus Binionen l. aus Binomien. S. 40. Z. 5. st. darstellt l. angiebt. S. 42. Note bb. Z. 4. ist H. auszulöschen. Note dd. Z. 1. 2. st. Lettres as osten l. Letters as often. S. 46. Z. 9. st. praepositi l. propositi. Ebend. Note gg Z. 4. st. sine propositi l. sive propositi. S. 47. Z. 12. st. die Zahl dieser Zeichen l. die Zahlen dieser Zeichen S. 52. Z. 4. v. u. st. ihre Werthe l. ihrer Werthe S. 53. Z. 19. st. $12b^2bc$ l. $12a^2bc$. Z. 20. st. $4ab^2$ l. $4ab^3$. S. 58. Z. 5. v. u. st. besondere Zeichen l. besondern Zeichen. S. 60. Z. 10. st. $\frac{n.n-3}{1.2}$ l. $\frac{n.n-1}{1.2}$. S. 68. Z. 13. Gelegenheit, geflissentlich l. Gelegenheit geflissentlich, S. 69. Z. 7. st. veranlaßt hatten l. hatte, Z. 22. st. Jahre 1779. l. 1778. S. 72. Note ss. Z. 5. v. u. st. aus den l. aus dem, S. 82. Z. 6. st. 12244 l. 12244. S. 83. lezte Z. st. 9mal l. 9mal. S. 84. Z. 23. st $65+2$ l. $6.5+2$. S. 87. Z. 23. st. 1234. l. 1, 2, 3, 4 S. 92. Z. 19. st. $\overset{r}{C} = {}^{r-3}C$ l. $\overset{r}{C} = c^{r-3}C$. S. 100. Z. 18. 20. st. n setze man m. S. 112. Z. 5. st. mitgetheilt hatte. Herr Fischer l. mitgetheilt hatte; Herr Fischer. S. 116. Z. 16. st. $(\alpha q)^q$ und $(\alpha u)^{3q}$ l. $(\alpha y)^q$ u. $(\alpha y)^{3q}$ S. 117. Z. 9. st. $\gamma\beta^I$ l. γB^I u. Z. 6. v. u. st. $4\beta\gamma^4$ l. $4\beta^3\gamma$. S. 119. Note bc. Z. 3. st. $\frac{2\beta\delta+\gamma}{\alpha^2}$ zu lesen $\frac{2\beta\delta\mp\gamma^2}{\alpha^3}$ S. 120. Note cd. Z. 4. st. blos β l. blos von β, S. 122. Z. 3. st. So käme l. So kämen. S. 124. Z. 11. st. mutantis l. mutandis. Z. 21. st. Auflösungsformel l. Auflösungsreihe. S. 125. Note ik. Z. 4. st. formandi, squae, l. formandis, quae S. 127. Note op. Z. 7. st. Exempeln oben l. Exempeln der oben S. 133. Note vw. Z. 22. st. $\alpha^{\Pi} + \beta^{\Pi+\Delta}$ l. $\alpha y^{\Pi} + \beta y^{\Pi+\Delta}$. Z. 23. st. TIII. l. VIII, S. 134. Note wx. Z. 2. st. Dign. p. XV. l. Dign. Praef. p. XV. Z. 5. st. de Moivres l. de Moivre. S. 136. Z. 15. st. nach Potenzen l. nach Potenzen von y. S. 147. Z. 1. st. Herr Eschenbach l. d) Herr Eschenbach. S. 152. Z. 3. v. u. st. zerfalle. l. zerfalle: S. 153. Z. 4. st. begränzt l. begränzt; S. 154. Z. 8. v. u. st. a^{m-r} l. a^{m-1} S. 155. Z. 3. st. das Numeriren l. das Schreiben

ben der Zahlen nach der Ordnung. S. 159. Note x Z. 9. st. findet man l. findet man auch. S. 162. Z. 17. st. $^{m+u-1}\mathfrak{M}$ l. $^{m+n-1}\mathfrak{M}$. S. 167. Z. 15. st. $+ {}^{n}\mathfrak{B}$ l. $^{n}\mathfrak{B}$. 1. Der Buchstabe v auf der ganzen Seite ist ein lateinisches kleines Vav und muß nicht mit einem griechischen kleinen Ny verwechselt werden. S. 169. Z. 5. v. u. st. $^{n+4}\mathfrak{C} = + {}^{-n}\mathfrak{C}$ l. $- {}^{-n}\mathfrak{C}$ S. 171. Z. 1. st. oben angeführte l. oben (S. 169) angeführte. Seite 172. Zeile 4 von unten, statt (171.) lese man (162.) S. 172. Note o. Z. 1. Tafel VIII, A. l. VIII, A. S. 176. Z. 6. v. u. st. (S. 173.) l. (S. 172.) Tafel I. Col. 4. Z. 4. st. $\overset{srqp}{D}$ l. $^{1}\overset{srqp}{D}$. Col. 4. lezte Zeile st. wie in c und d) l. wie folget: Col. 5. Z. 1. st. d) Zeiger; ist d) wegzustreichen. Z. 15. st. $^{-\mu}\mathfrak{B}\overset{q}{p}{}^{n}B$ l. $^{-\mu}\mathfrak{B}\overset{q}{b}{}^{n}B$ Z. 20. st. sehr wichtig; l. sehr wichtig. Z. B. Z. 21. st. $p^{m}\, p^{-n}$ l. $p^{m}\, q^{-n}$ Tafel III. D. 3tes Fach st. $\overset{r}{\mathfrak{C}} = c^{r-2.3}B$ l. $\overset{r}{\mathfrak{C}} = c^{r-2.3}C$. Tafel IV. A. 2te Abtheilung 5tes und 6tes Fach st. Zeiger. l. Zeiger: st. $\overset{n\mu+}{IN}$ l. $\overset{n\mu+\delta}{IN}$. Tafel V. Col. 2. Z. 8. st. $2aa^{n-2}A$ l. $2aa^{r-2}A$. Col. 5. Z. 5. st. $^{n}\mathfrak{D}a^{n-4}b D$ l. $^{n}\mathfrak{D}a^{n-4}b^{4}D$. Tafel VI. Col. 1. Zeile 16. statt $^{m+2}\mathfrak{M}z^{\delta 2}$ l. $^{m+2}\mathfrak{M}z^{2\delta}$. Col. 2. Z. 7. st. §. XXVII. seq. l. §. XXVII. 4. seq. Col. 3. lezte Zeile st. cf. die vorhergehende Tafel VI. A. und C. l. [Cf. die folgende Tafel VII. A. und C.]

Der (S. 83.) angegebene dreyfache Werth von R enthält überhaupt die möglichen Fälle der Grösse einer Zahl (R) gegen eine andere (m—1). Aber bey der Beschränkung $m < n + 1 - k$ kann der dortige erste Fall $R = r$ nicht statt haben, und fällt also weg.

Bestimmte
sklassen.

LVI; 22.)

$\cdot\ {}'\overset{\ldots srqp}{\mathfrak{A}}$

XI.

LVI; 23.)

$\ldots = {}'\overset{p}{A}$

$\ldots = {}'\overset{qp}{B}$

$\ldots = {}'\overset{rqp}{C}$

$\ldots = {}'\overset{srqp}{D}$

$\ldots = {}'\overset{\ldots srqp}{\mathfrak{A}}$

129-135.
p. 177-180.

tionsclassen.

d) Zeiger (Index) für a, b, c in B
(XLVII)

$$\left\{\begin{array}{l} a\overset{1}{z}^1 + b\overset{2}{z}^2 + c\overset{3}{z}^3 + d\overset{4}{z}^4 + \ldots \text{etc.} = p \\ \alpha z^1 + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots \text{etc.} = q \\ \mathfrak{A}z^1 + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots \text{etc.} = r \\ \mathfrak{a}z^1 + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \ldots \text{etc.} = s \\ \quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad\quad\quad\quad\quad '' \end{array}\right\}$$

(Ausführliche Tafeln der Producte aus mehrern Reihen LXXI-LXXVI.)

d) Producte mehrerer Potenzen und ihrer Classen durch einander (XLV, 21.) z. B.

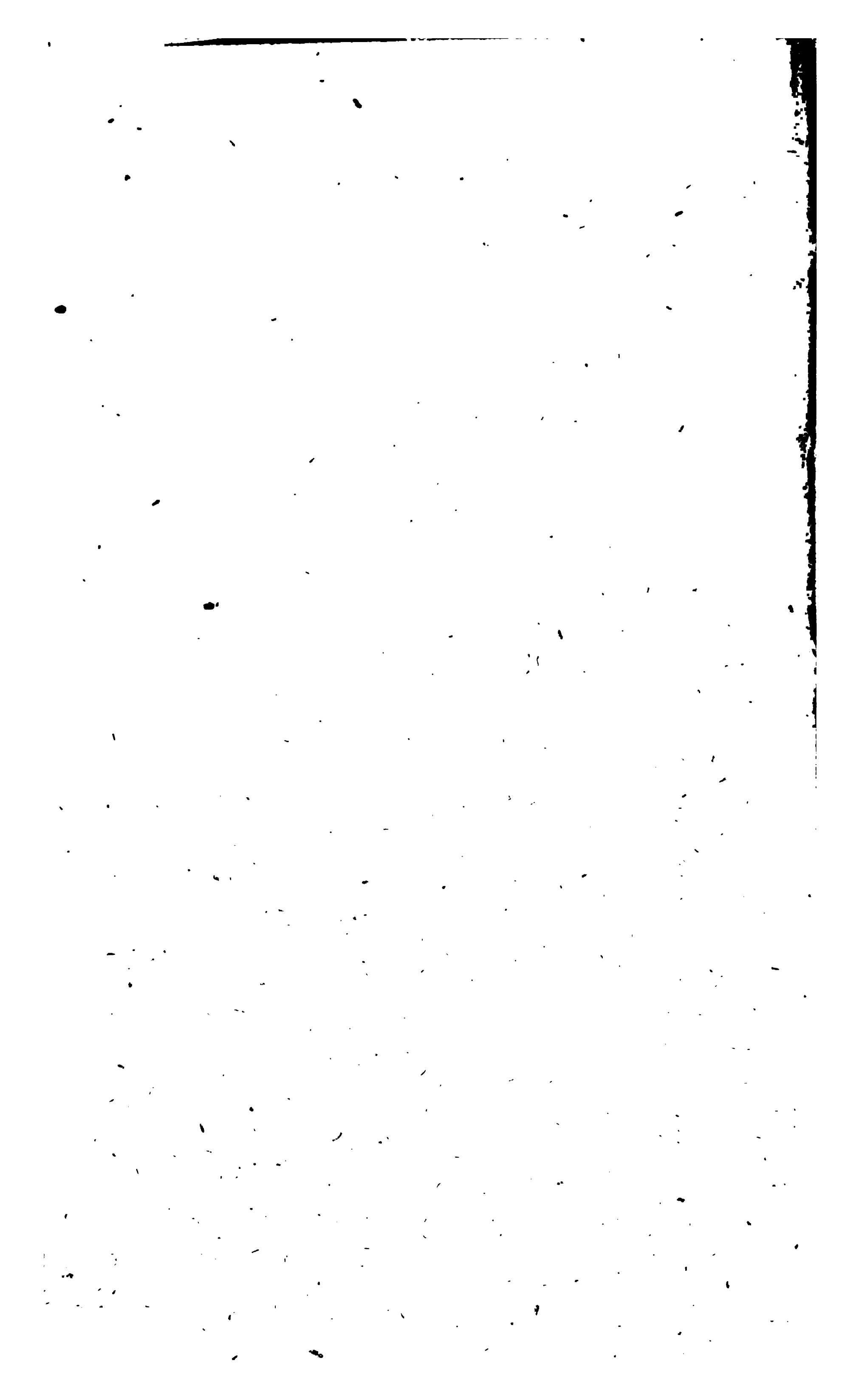
$$p^m q^{-\mu};\ p^m q^{-\mu} r^n;\ p^m q^{-\mu} r^n s^{-\nu};\ \text{etc.}$$

Hier werden selbst die Classenzeichen mit Buchstaben p, q, r, s, . . . ꝛc. bezeichnet;

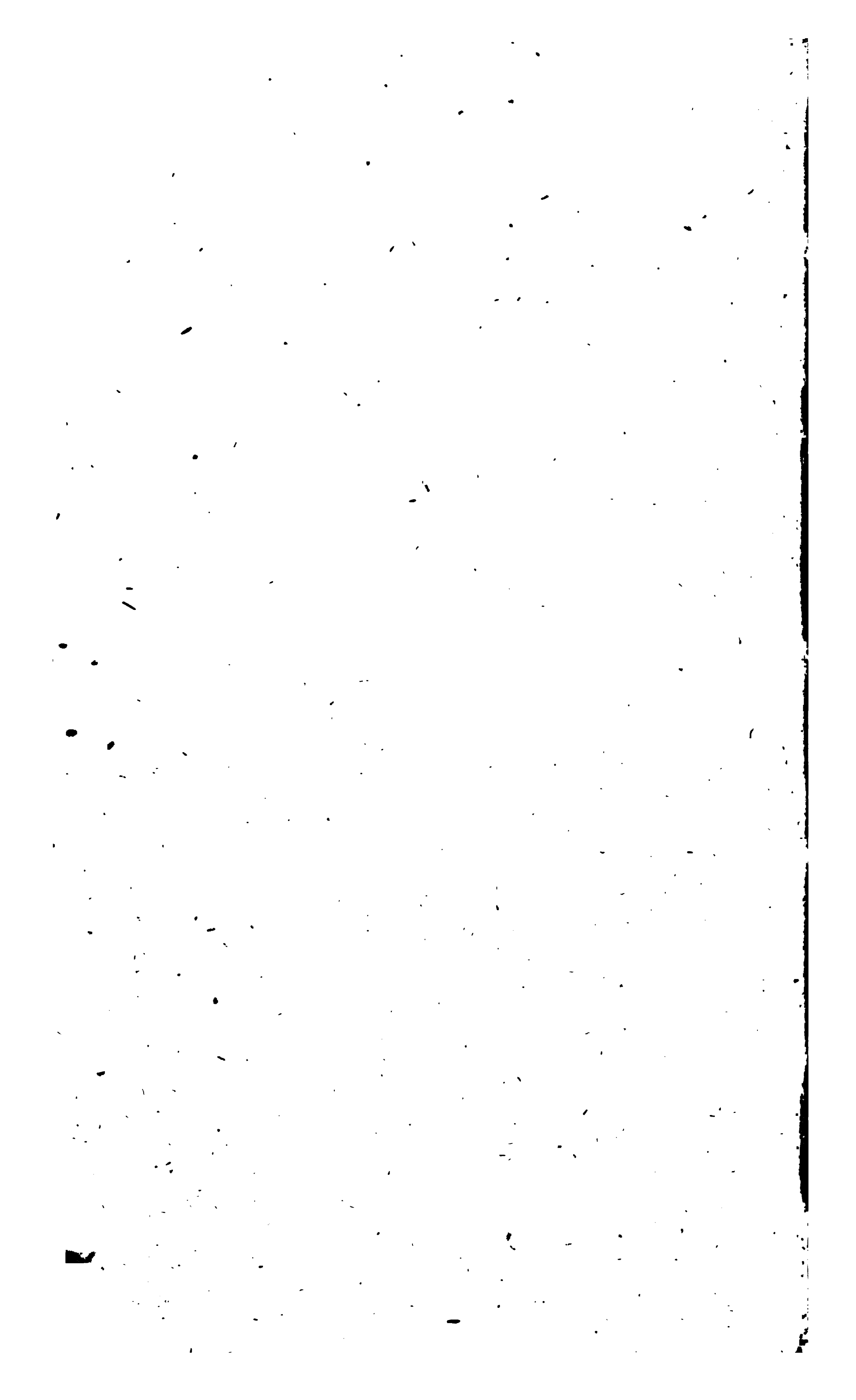
$$^m\mathfrak{A}a^n\overset{p}{A};\ {}^{-\mu}\mathfrak{B}p^n\overset{q}{B};$$

$$^n\mathfrak{C}c^n\overset{r}{C};\ {}^{-\nu}\mathfrak{D}d^n\overset{s}{D};\ \text{etc.}$$

Cf. Inf. Dign. §. XXVI. Hier wird, wie in andern verwickelten zusammengesezten Aufgaben, der Gebrauch der Localausdrükke sehr wichtig.



3.	2te Ordnung (aus 1, 2.) §. 267, 268.
	$\overset{2}{IA},\ \overset{3}{IA},\ \overset{4}{IA},\ \overset{5}{IA}\ \ldots\ldots\ \overset{2n}{IA}$
$-\mathfrak{Q}) \ldots$	3te Ordnung (aus 1, 2, 3) §. 267. 268.
$+2r$ $IQ) \ldots$	$\overset{3}{IA\mathfrak{A}},\ \overset{4}{IA\mathfrak{A}},\ \overset{5}{IA\mathfrak{A}}\ \ldots\ldots\ \overset{3n}{IA\mathfrak{A}}$
$m+2r$ $-\mathfrak{Q}) \ldots$	4te Ordnung (aus 1 2 3 4) §. 267, 268.
$p+2$ $IQ) \ldots$	$\overset{4}{IA\mathfrak{A}a},\ \overset{5}{IA\mathfrak{A}a},\ \overset{6}{IA\mathfrak{A}a}\ \ldots\ldots\ \overset{4n}{IA\mathfrak{A}a}$
$p+2$	etc. etc. etc. etc.
$\mathfrak{Q}) \ldots$	[Die hier nöthigen Zahlenzerfällungen müssen von Exempel §. 267. S. 85. abstrahirt werden.]
Ordnungen 5.	b. Unbestimmte markirte Dimensions-Zeichen. §. 269. §. 275.
	1ste Ordnung; §. 269.
$\overset{2m}{\mathfrak{B}}$	1) $\overset{p}{I},\ \overset{p+t}{I},\ \overset{p+2t}{I},\ \overset{p+3t}{I}\ \ldots\ldots\ \overset{p+nt}{I}$
$\overset{3m}{\mathfrak{C}}$	2) $\overset{q}{A},\ \overset{q+t}{A},\ \overset{q+2t}{A},\ \overset{q+3t}{A}\ \ldots\ldots\ \overset{q+nt}{A}$
.	3) $\overset{r}{\mathfrak{A}},\ \overset{r+t}{\mathfrak{A}},\ \overset{r+2t}{\mathfrak{A}},\ \overset{r+3t}{\mathfrak{A}}\ \ldots\ldots\ \overset{r+nt}{\mathfrak{A}}$
$\ldots\ \overset{nm}{\mathfrak{N}}$	4) $\overset{s}{a},\ \overset{s+t}{a},\ \overset{s+2t}{a},\ \overset{s+3t}{a}\ \ldots\ldots\ \overset{s+nt}{a}$
$\ldots\ \overset{nm+n}{\mathfrak{N}}$	etc. etc. etc. etc. etc.
	2te Ordnung (aus 1. 2)



Tafe[illegible]ations=Zeichen.

A 1	$\overset{r}{\mathfrak{B}}$ F / b ^{r}B) 6	etc. / etc.	$\overset{r}{\mathfrak{N}} = n^{r-(m-1)n}\mathfrak{N}$ / $n\,^r\mathfrak{N} = \overset{r+(m-1)n}{\mathfrak{N}}$

$\overset{3}{m-1}$ c — m, 2m, 3m, 4m. . . . . nm / 1, 2, 3, 4. . . . . n

= b ^{r}[illegible] / = I[illegible]	$\overset{r}{\mathfrak{J}} = i\,^r I$ / $i\,^r I = \overset{r}{IX}$	etc. / etc.	$\overset{r}{\mathfrak{N}} = n\,^r\mathfrak{N}$ / $n\,^r\mathfrak{N} = \overset{r}{IN}$

3 c — 4 d) sind 1, 2, 3, 4, 5. . . . . . . n / . . . . $\overset{r}{\mathfrak{N}} = \overset{r}{IN}$

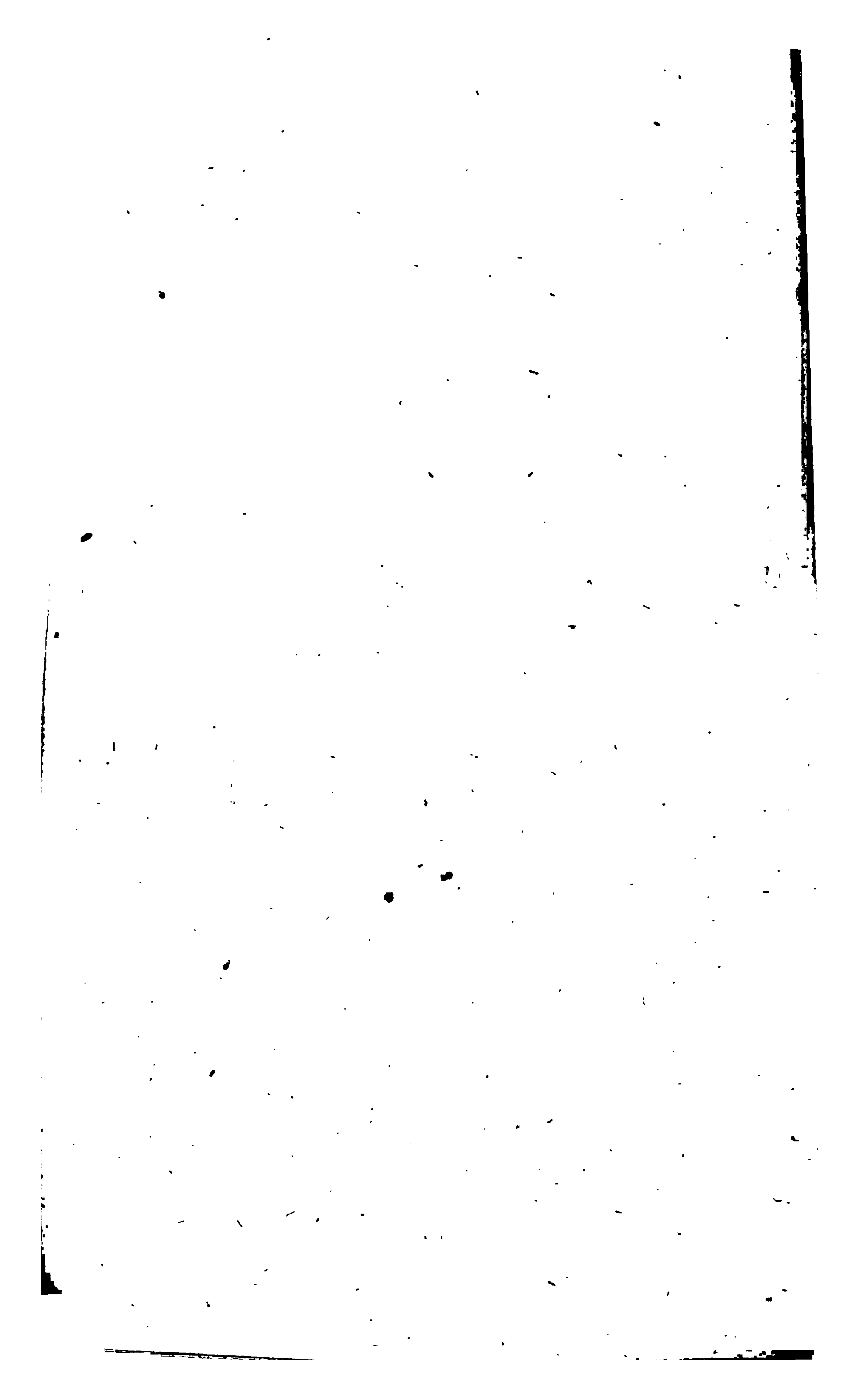
$\overset{r}{\mathfrak{B}}$ = / b ^{r}B =	etc. / etc.	$\overset{r}{\mathfrak{N}} = n^{r-1.n}\mathfrak{N}$ / $n\,^r\mathfrak{N} = \overset{r+1.n}{\mathfrak{N}}$

2 c — 3 d — 2, 4, 6, 8, 10. . . . . 2n / 1, 2, 3, 4, 5, ... n

$\overset{r}{\mathfrak{B}}$ = / b ^{r}B =	etc. / etc.	$\overset{r}{\mathfrak{N}} = n^{r-2.n}\mathfrak{N}$ / $n\,^r\mathfrak{N} = \overset{r+2.n}{\mathfrak{N}}$

1 c — [illegible] 3, 6, 9, 12, 15. . . . . . . 3n / [illegible] 1, 2, 3, 4, 5 . . . . n

[illegible] könnte [illegible]ten u. s. w. Gliede anfangen.



I. ...binations-Zeichen.

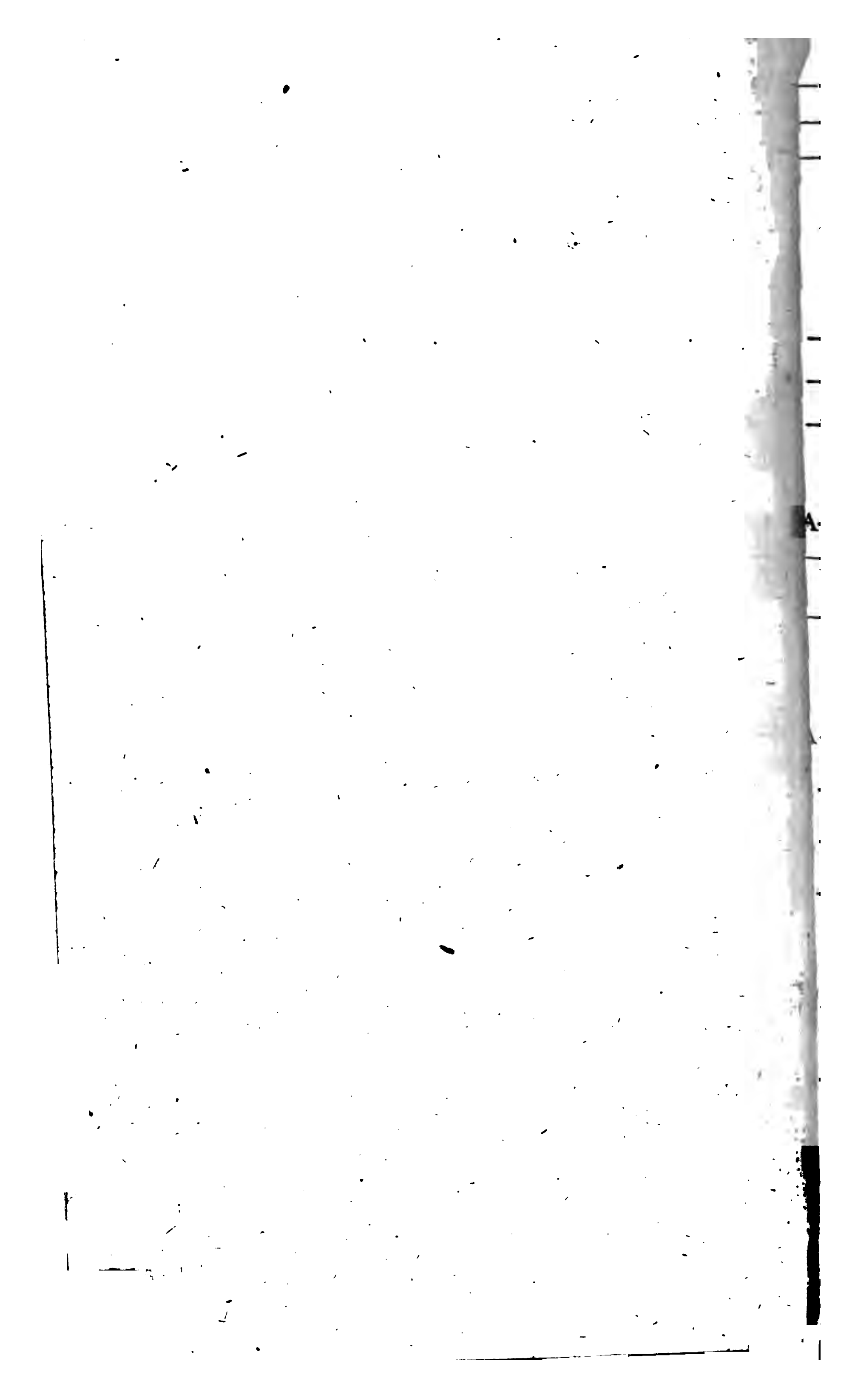
A. ...ssen-Zeichen.

...dnu...	...lasse.	6te Ordnung oder Classe.			etc.
$\overset{2}{I...}$	e^5E	$\overset{6}{VI}$	=	f^6F	etc.
$\overset{3}{I...}$	e^6E	$\overset{7}{VI}$	=	f^7F	etc.
$\overset{4}{I...}$	e^7E	$\overset{8}{VI}$	=	f^8F	etc.
$\overset{5}{I...}$	e^8E	$\overset{9}{VI}$	=	f^9F	etc.
"	"	"		"	"
$\overset{n+...}{I...}$	$e^{n+4}E$	$\overset{n+5}{VI}$	=	$f^{n+5}F$	etc.

...+1)te...	...n Zeiger.	wäre die nte Ord. oder Classe (§. 39)		
...I) =	$^{\mu}A$	$\overset{n\mu}{IN}$	=	$\mathfrak{n}^{n\mu}\mathfrak{N}$
...I) =	$^{\mu+\delta}A$	$\overset{n\mu+}{IN}$	=	$\mathfrak{n}^{n\mu+\delta}\mathfrak{N}$
...I) =	$^{\mu+2\delta}A$	$\overset{n\mu+2\delta}{IN}$	=	$\mathfrak{n}^{n\mu+2\delta}\mathfrak{N}$
"	"	"		"
"	"	"		"

...B. ...ssen-Zeichen.

)



: t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

[Der kleinste Werth für r ist n+1]

A

$+A+\ {}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{2}B$

$+A+\ {}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{3}B+\ {}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{3}C$

$+^{4}A+\ {}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{4}B+\ {}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{4}C+\ {}^{n}\mathfrak{D}a^{n-4}\mathfrak{b}D$

" " "

" " "

$A+{}^{n}A+{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{r-n}B+{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{r-n}C+{}^{n}\mathfrak{D}a^{n-4}\mathfrak{d}^{r-n}D+\ldots n^{r-n}\mathfrak{N}$

$+^{n+1}A\pm{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{n+2}B\mp{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{n+3}C\ldots-{}^{n}\mathfrak{A}a\overset{-1}{n}{}^{2n-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}+n^{2n}\mathfrak{N}$

$+^{n+2}A\pm{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{n+3}B\mp{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{n+4}C\ldots-{}^{n}\mathfrak{A}a\overset{-1}{n}{}^{2n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}+n^{2n+1}\mathfrak{N}$

$+^{+3}A\pm{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{n+4}B\mp{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{n+5}C\ldots-{}^{n}\mathfrak{A}a\overset{-1}{n}{}^{2n+1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}+n^{2n+2}\mathfrak{N}$

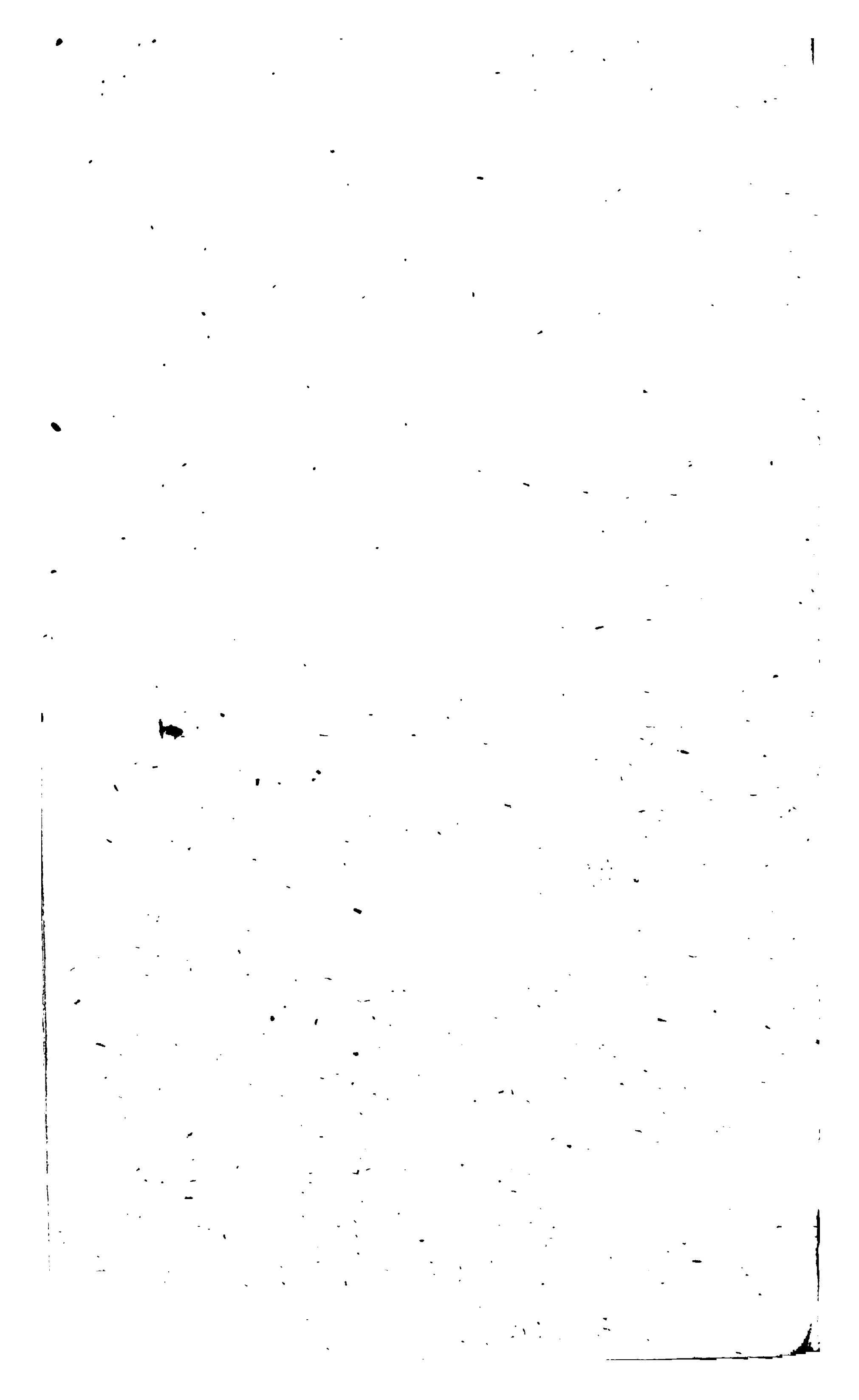
$+^{+4}A\pm{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{n+5}B\mp{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{n+6}C\ldots-{}^{n}\mathfrak{A}a\overset{-1}{n}{}^{2n+2}\overset{-1}{\mathfrak{N}}+n^{2n+3}\mathfrak{N}$

" " " "

" " " "

$A\,{}^{r-n+1}A\pm{}^{n}\mathfrak{B}a^{n-2}\mathfrak{b}^{r-n+2}B\mp{}^{n}\mathfrak{C}a^{n-3}\mathfrak{c}^{r-n+3}C\ldots-{}^{n}\mathfrak{A}a\overset{-1}{n}{}^{r-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}+n^{r}\mathfrak{N}$

Zeichen für gerade, die untern für ungerade Werthe von n]
Werth den r haben kann, ist die ganze Zahl 2n+1]



B. Producte vielgliedriger ungleicher Factoren, nach Fischer (§. 1, 2. §. 265 — 275.)

I. Für bestimmt markirte Reihen p, q, r, s....
(wie hier in A, III, oder hier Tafel II, B, a)

$$qp = \overset{2}{a}A + \overset{3}{a}A + \overset{4}{a}A + \ldots$$

$$rqp = \overset{3}{\mathfrak{A}}aA + \overset{4}{\mathfrak{A}}aA + \overset{5}{\mathfrak{A}}aA + \ldots$$

$$srqp = \overset{4}{a}\mathfrak{A}aA + \overset{5}{a}\mathfrak{A}aA + \overset{6}{a}\mathfrak{A}aA + \ldots$$

〃 〃 〃 〃

〃 〃 〃 〃

[Die Regel der hier nöthigen Zahlenzerfällungen muß von Ex. §. 267. S. 85. unten, abstrahirt werden.]

II. Für unbestimmt markirte Reihen α, β, γ....
(wie §. 269, 272, 275 und hier Tafel II, B, b)

$$\alpha\beta = \overset{p+q}{A\mathfrak{A}} + \overset{p+q+t}{A\mathfrak{A}} + \overset{p+q+2t}{A\mathfrak{A}} + \ldots$$

$$\alpha\beta\gamma = \overset{p+q+r}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+t}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+2t}{A\mathfrak{A}I} + \ldots$$

〃 〃 〃 〃

〃 〃 〃 〃

III. Für $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ wird (§. 274.)

$$\alpha\beta = \overset{2p}{B} + \overset{2p+t}{B} + \overset{2p+2t}{B} + \ldots\ldots$$

$$\alpha\beta\gamma = \overset{3p}{C} + \overset{3p+t}{C} + \overset{3p+2t}{C} + \ldots\ldots$$

〃 〃 〃 〃

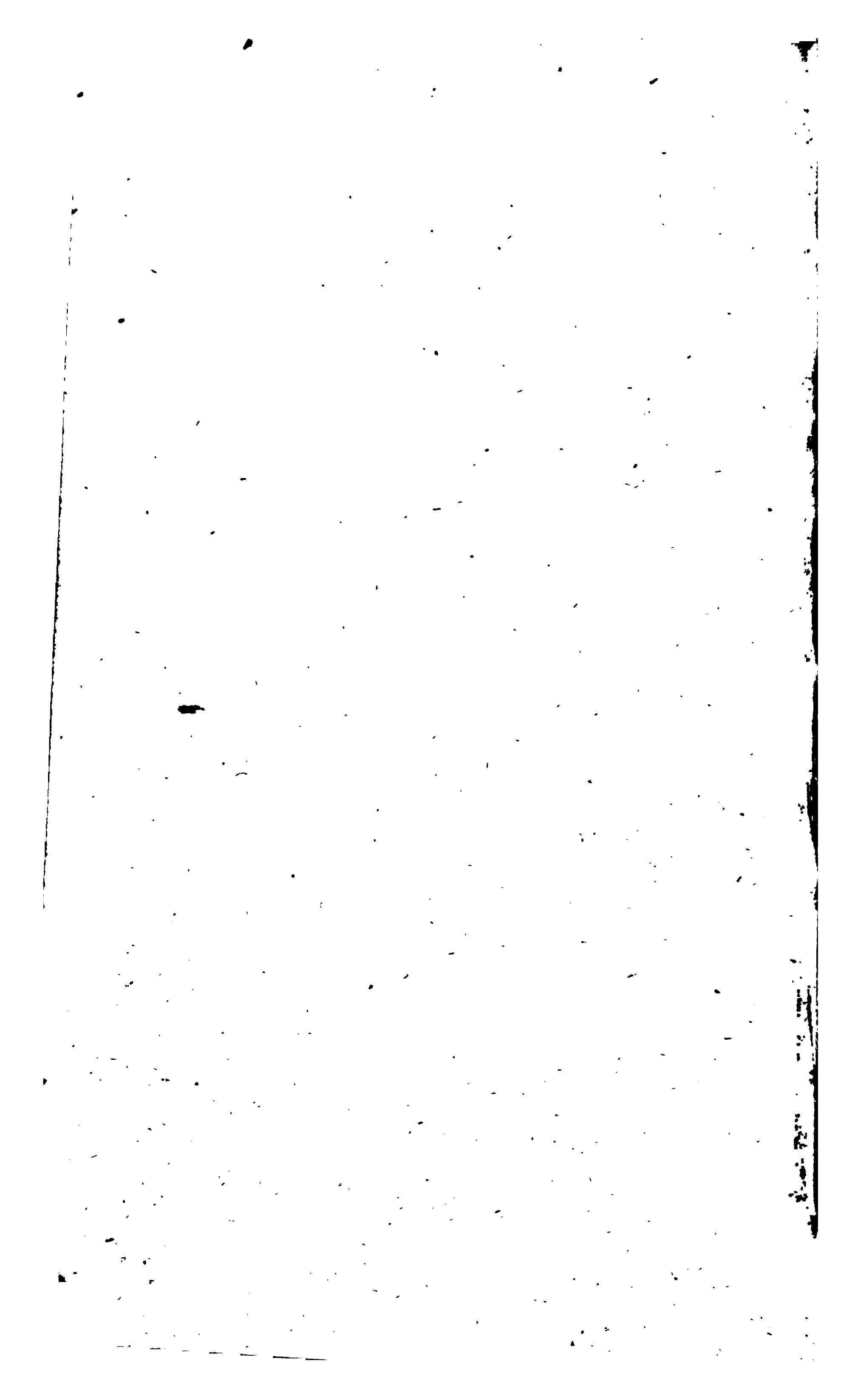
〃 〃 〃 〃

C. Quotienten aus der Division der Reihen durch Reihen, nach Hindenburg und Fischer.

Hieher gehören:

a) Die Formeln der ausführlichen Hindenburgischen Tafel [LXXIX · LXXXIII]

b) Die einzige Formel im Fischerischen Werke §. 281, und die Nachweisung. § 282.



$+ \ c + d + e + \ldots\ldots\ldots$

C. Potenzen, jeder Exponenten.

a) ganzer positiver Exponenten.

§. 47. und Hindenburg Inf. Dign. §. XXVIII.)

$$+ \overset{n+1}{\mathrm{IN}} + \overset{n+2}{\mathrm{IN}} + \ldots\ldots + \overset{np}{\mathrm{IN}} \Big\}$$ für $x=1$ in A

$$+ n^{n+1}\mathfrak{N} + n^{n+2}\mathfrak{N} + \ldots\ldots + n^{np}\mathfrak{N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots\ldots \\ a & b & c & d\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Oder [Nov. Syst. Comb. p. XX.]

$$a^{n-1}a'A + a^{n-2}b'B + a^{n-3}c'C + \ldots a^{n-m}m'\mathfrak{M}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots\ldots \\ b & c & d & e\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

b) Exponenten jeder Art.

. 71, 4. S. 48; und Hindenburg Inf. Dign. p. 146.)

$$\overset{1}{} + \beta a^{m-2}\overset{p+2}{\mathfrak{B}} + \gamma a^{m-3}\overset{p+3}{\mathfrak{C}} + \ldots\ldots \pi a^{m-p}\overset{2p}{\mathfrak{P}} \Big\}$$ für $n=m$ und $x=1$ in B.

$$a^{p}A + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{p}B + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}c^{p}C + \ldots\ldots \mathfrak{P}a^{m-p}p^{p}P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots\ldots \\ b & c & d & e\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Oder [Inf. Dign. p. 40.]

$${}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}a'A + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b'B + \ldots\ldots {}^{m}\mathfrak{N}a^{m-n}n'\mathfrak{N}$$

$$\begin{pmatrix} b & c & d & e\ldots\ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$$^{b} + \gamma x^{c} + \delta x^{d} \ldots\ldots$$

r Reihe Potenzen werden auf die in II. reducirt.

Der Coefficient ${}^{m}\mathfrak{N}\alpha^{m-n}\beta^{p}\gamma^{q}\delta^{r}\varepsilon^{s}\ldots\ldots$

gehört zu $x^{(m-n)a+pb+qc+rd+se\ldots\ldots}$

Infin. Dign. §. XXVIII, 10, 11; p. 148—150.

